

ĐOÀN VƯƠNG NGUYÊN

BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ

TUYÊN TÍNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HỒ CHÍ MINH
2011

MỤC LỤC

Chương I. Ma trận – Định thức

1. Ma trận	5
1.1. Khái niệm ma trận	5
1.2. Các phép toán trên ma trận	6
1.3. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận	14
1.4. Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn	15
1.5. Ma trận khả nghịch.....	16
2. Định thức.....	19
2.1. Ma trận con cấp k	19
2.2. Định nghĩa định thức.....	19
2.3. Các tính chất cơ bản của định thức	20
2.4. Định lý Laplace về khai triển định thức.....	22
2.5. Định lý Laplace mở rộng	23
2.6. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo	28
2.7. Hạng của ma trận	29
Bài tập trắc nghiệm chương I.....	32

Chương II. Hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ phương trình tổng quát	35
1.1. Định nghĩa.....	35
1.2. Hệ Cramer	36
1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss	39
1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.....	41
2. Hệ phương trình thuần nhất	43
2.1. Định nghĩa.....	43
2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất	44
2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.....	46
Bài tập trắc nghiệm chương II.....	47

Chương III. Không gian vector

1. Khái niệm không gian vector	49
1.1. Định nghĩa.....	49
1.2. Tính chất của không gian vector	49
1.3. Các ví dụ về không gian vector.....	49
1.4. Không gian vector con	50
2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính.....	50
2.1. Tổ hợp tuyến tính	50
2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính	52
2.3. Hệ vector trong R^n	54
3. Số chiều, cơ sở của không gian vector	55
3.1. Không gian sinh bởi một hệ vector	55
3.2. Số chiều và cơ sở	56
4. Tọa độ của vector	58
4.1. Tọa độ của vector đối với một cơ sở.....	58
4.2. Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau	60
Bài tập trắc nghiệm chương III	62

Chương IV. Ánh xạ tuyến tính

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính	64
1.1. Định nghĩa.....	64
1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính	65
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính.....	67
2.1. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính.....	67
2.2. Định lý chuyển đổi ma trận của ánh xạ tuyến tính.....	72
2.3. Thuật toán tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính.....	73
3. Trị riêng – Vector riêng.....	74
3.1. Ma trận đồng dạng	74
3.2. Đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng	75
3.3. Trị riêng, vector riêng	76
3.4. Không gian con riêng.....	78
3.5. Định lý Cayley – Hamilton	81
4. Chéo hóa ma trận vuông	82
4.1. Khái niệm ma trận chéo hóa được	82
4.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được.....	82
4.3. Ma trận làm chéo hóa ma trận vuông.....	82
4.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông	83
Bài tập trắc nghiệm chương IV	86

Chương V. Dạng toàn phương

1. Khái niệm dạng toàn phương	89
1.1. Dạng song tuyến tính	89
1.2. Dạng toàn phương.....	90
1.3. Dạng toàn phương chính tắc	91
2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hóa trực giao	93
2.1. Không gian Euclide.....	93
2.1.1. Định nghĩa.....	93
2.1.2. Chuẩn của một vector.....	93
2.1.3. Cơ sở trực chuẩn	93
2.2. Thuật toán chéo hóa trực giao.....	95
2.2.1. Ma trận trực giao.....	95
2.2.2. Thuật toán.....	96
3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng các thuật toán khác	99
3.1. Thuật toán Lagrange	99
3.2. Thuật toán Jacobi	101
3.3. Thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng.....	103
4. Nhận diện đường và mặt bậc hai.....	105
4.1. Nhận diện đường bậc hai	105
4.1.1. Định nghĩa.....	105
4.1.2. Phân loại đường bậc hai	105
4.1.3. Rút gọn đường Conic	105
4.2. Nhận diện mặt bậc hai.....	107
4.2.1. Định nghĩa.....	107
4.2.2. Sơ lược về luật quán tính Sylvester và dạng toàn phương xác định dấu	107
4.2.3. Phân loại mặt bậc hai	109
4.2.4. Rút gọn mặt bậc hai	110
Bài tập trắc nghiệm chương V	111
Đáp án Bài tập trắc nghiệm.....	116
Tài liệu tham khảo.....	117

Chương I

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1. MA TRẬN

1.1. Khái niệm ma trận

▪ Định nghĩa 1

- Một ma trận (matrix) A có cấp $m \times n$ trên \mathbb{R} là một hệ thống gồm $m \times n$ số thực a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Ma trận A như trên được viết gọn là $A = (a_{ij})_{m \times n}$.
- Các số thực a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận $(a_{ij})_{m \times n}$ nằm ở dòng thứ i và cột thứ j .
- Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận không.
- Cặp số (m, n) được gọi là kích thước của ma trận A . Hai ma trận có cùng kích thước được gọi là cùng cấp.
- Tập hợp các ma trận cấp $m \times n$ trên \mathbb{R} được ký hiệu là $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, ta có $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ và

$$a_{11} = 1, a_{12} = -2, a_{13} = 5, a_{21} = 0, a_{22} = 3, a_{23} = 6.$$

▪ Định nghĩa 2

Xét ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- Khi $m = n$, ta gọi A là ma trận vuông cấp n . Ký hiệu $(a_{ij})_{n \times n}$, $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ được viết gọn là $(a_{ij})_n$ và $M_n(\mathbb{R})$.
- Khi $m = 1$, ta gọi $A = (a_{11} \ \dots \ a_{1n}) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ là ma trận dòng.

- Khi $n = 1$, ta gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận cột.

- Khi $m = n = 1$, ta gọi $A = (a_{11}) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận 1 phần tử.

▪ Định nghĩa 3

- Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ của ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ được gọi là đường chéo chính của A , đường chéo còn lại được gọi là đường chéo phụ.
- Ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận chéo (diagonal matrix), ký hiệu là $A = \text{diag}(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$.
- Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị cấp n (Identity matrix), ký hiệu là I_n hay I .

- Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới (tương ứng, trên) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận tam giác trên (tương ứng, dưới).
- Ma trận vuông có tất cả các cặp phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính bằng nhau được gọi là ma trận đối xứng.

Ví dụ 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận chéo;}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận đơn vị;}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận tam giác trên;}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận tam giác dưới;}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận đối xứng.}$$

▪ **Định nghĩa 4**

Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và $a_{ij} = b_{ij} (\forall i, j)$, ký hiệu là $A = B$.

Ví dụ 3. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $A = B$ khi $x = 0, y = -1, z = 2, u = 2, t = 3$.

1.2. Các phép toán trên ma trận

1.2.1. Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$, ta định nghĩa

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$$

Ví dụ 4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

▪ **Nhận xét**

Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp.

1.2.2. Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và số $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

Ví dụ 5.

$$-3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

▪ **Chú ý**

- Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.
- Ma trận $-1 \cdot A = -A$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A .

Ví dụ 6.

$$5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 0 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ 4 & 16 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 16 & -16 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 7. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $2X + 4I_2 = 2A - B$.

Giải. Ta có:

$$2X + 4I_2 = 2A - B \Leftrightarrow 2X = 2A - B - 4I_2 \Leftrightarrow X = A - \frac{1}{2}B - 2I_2$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } X = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{jk})_{n \times p}$, ta định nghĩa

$$AB = (c_{ik})_{m \times p}$$

trong đó $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$ ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p$).

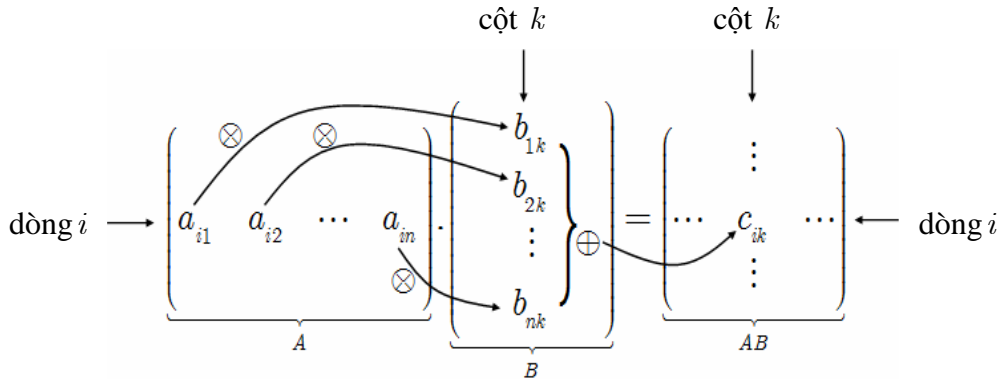
▪ **Chú ý**

Điều kiện để phép nhân AB thực hiện được là số cột của ma trận A (ma trận trước) bằng số dòng của ma trận B (ma trận sau).

▪ **Nhận xét**

- Số dòng của ma trận tích AB bằng số dòng của ma trận A , số cột của ma trận tích AB bằng số cột của ma trận B .

• Sơ đồ nhân hai ma trận A và B :



Ví dụ 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1.4 + 2.5 + 3.6) = (32),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = ((1.3 + 2.6) \quad (1.4 + 2.7) \quad (1.5 + 2.8)) = (15 \quad 18 \quad 21),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2(-1) & 1.0 + 2.0 \\ 0.2 + 0.(-1) & 0.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 9. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Thực hiện các phép tính sau: 1) AI_3 ; 2) I_2A .

Giải

$$1) AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2) I_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 10. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính sau: 1) AB ; 2) BA .

Giải

$$1) AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

▪ **Nhận xét**

- Tích của hai ma trận khác không có thể là một ma trận không.
- Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

▪ **Tính chất**

Cho các ma trận A, B, C và số $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả thiết rằng các phép tính đều thực hiện được, ta có:

- $(AB)C = A(BC)$ (tính chất kết hợp);
- $A(B + C) = AB + AC$ (tính chất phân phối bên trái);
- $(A + B)C = AC + BC$ (tính chất phân phối bên phải);
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
- $AI_n = A = I_m A$, với $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 11. Thực hiện phép tính sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 12. Thực hiện phép tính $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & 3 \\ 7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 8 \\ 23 & 0 & -10 \\ -35 & -21 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

Thực hiện phép nhân từ phải sang trái ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Lũy thừa ma trận vuông

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp như sau:

$$A^0 = I_n, A^1 = A, A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A^k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

- Nếu A khác ma trận không và $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ma trận lũy linh. Số $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là cấp của ma trận lũy linh A .

Ví dụ 13. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3 vì:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0_{ij})_3, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0_{ij})_3.$$

▪ **Tính chất**

- i) $[(0_{ij})_n]^k = (0_{ij})_n, (I_n)^k = I_n, \forall k \in \mathbb{N}.$
- ii) $A^{k+m} = A^k \cdot A^m, \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall k, m \in \mathbb{N}.$
- iii) $A^{km} = (A^k)^m, \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall k, m \in \mathbb{N}.$

▪ **Chú ý**

- Nếu $A = \text{diag}(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$ thì $A^k = \text{diag}(a_{11}^k \ a_{22}^k \ \dots \ a_{nn}^k).$
- Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB = BA$ (giao hoán) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B . Khi $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

Ví dụ 14. Xét ma trận chéo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ta có:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 15. Xét hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, ta có:

- $AB = BA = I_2,$
- $(A + B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix},$
- $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2$
 $= \begin{pmatrix} 14 & 25 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -25 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$

Suy ra $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$