

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH  
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN**

**BÀI TẬP THƯỜNG KỲ**

**HÀM PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

**GVHD: ThS. Đoàn Vương Nguyên**

**Lớp học phần:.....Khoa: KHCB**

**Học kỳ:.....Năm học: 2011 – 2012**

**Danh sách nhóm: (ghi theo thứ tự ABC)**

- 1. Nguyễn Văn A**
- 2. Lê Thị B**

.....

**HƯỚNG DẪN TRÌNH BÀY**

- 1) Trang bìa như trên (*đánh máy, không cần in màu, không cần lời nói đầu*).
- 2) Trong phần làm bài tập, chép đề câu nào xong thì giải rõ ràng ngay câu đó.
- 3) Trang cuối cùng là Tài liệu tham khảo:
  - 1. Nguyễn Kim Đính – *Hàm phức và ứng dụng* – ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 1998
  - 2. Nguyễn Kim Đính – *Phép biến đổi Laplace* – NXB Khoa học và Kỹ thuật – 1998
  - 3. Võ Đăng Thảo – *Hàm phức và Toán tử Laplace* – ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 2000
  - 4. Phan Bá Ngọc – *Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace* – NXB Giáo dục – 1996
  - 5. Trương Văn Thương – *Hàm số biến số phức* – NXB Giáo dục – 2007
  - 6. Đâu Thế Cấp – *Hàm biến phức và phép tính Toán tử* – NXB ĐH Quốc gia – 2006
  - 7. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải – *Hàm biến phức* – NXB Đại học Quốc gia Hà Nội – 2006
  - 8. Theodore. W. Gamelin – *Complex Analysis* – Department of Mathematics UCLA
  - 9. Trương Thuận – *Tài liệu Hàm phức và phép biến đổi Laplace* – ĐH Công nghiệp TP.HCM

**Chú ý**

- Phân làm bài **bắt buộc phải viết tay** (*không chấp nhận đánh máy*) trên 01 hoặc 02 mặt giấy A4 và đóng thành tập cùng với trang bìa.
- Thời hạn nộp bài: **Tiết học cuối cùng** (Sinh viên phải tự đọc trước bài học cuối để làm bài!).
- Nếu **nộp trễ** hoặc **ghi sót tên của thành viên trong nhóm** sẽ **không được giải quyết và bị cấm thi**.
- Mỗi nhóm chỉ **từ 01 đến tối đa là 07** sinh viên. Sinh viên **tự chọn nhóm** và nhóm **tự chọn bài tập**.
- Phần làm bài tập, sinh viên phải **giải bằng hình thức tự luận** rõ ràng.
- \* Nếu làm **đạt yêu cầu mà chỉ chọn toàn câu hỏi dễ** thì điểm tối đa của nhóm là **8 điểm**.

**• Cách chọn bài tập như sau**

- 1) Nhóm chỉ có 1 sinh viên thì chọn làm **32 câu hỏi nhỏ** (*các câu hỏi nhỏ phải nằm trong các câu hỏi khác nhau*) gồm:
  - Chương 1: chọn 7 trong 9 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
  - Chương 2: mỗi câu hỏi chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
  - Chương 3: chọn 6 trong 7 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
  - Chương 4: chọn 5 trong 8 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
  - Chương 5: chọn 10 trong 11 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
- 2) Nhóm có từ 2 đến tối đa 7 sinh viên thì làm như nhóm có 1 sinh viên, đồng thời **mỗi sinh viên tăng thêm** phải chọn làm thêm **16 câu hỏi nhỏ khác** (*nằm trong các câu hỏi khác nhau*).

.....

# ĐỀ BÀI TẬP

## Chương 1. SỐ PHỨC

**Câu 1.** Thực hiện các phép tính sau dưới dạng đại số

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{\overline{3i - (1+i)^3}}{(2+i)^2 \cdot 1+2i} & 2) \frac{(1+i)(2-i)^3}{(2+i)^2 - (1+2i)} & 3) \frac{(1+i)^2 - \overline{5i}}{(1-i)^3 + (1+i)^2} & 4) \frac{(2+3i)^2 + (2-3i)^2}{(5+4i)^2 \cdot 5+4i} \\
 5) \frac{\overline{3-i} \cdot (\overline{3+i})^2}{(4-3i)^2} & 6) \frac{(1+3i)^2 - \overline{-2i}}{(3-i)(2+3i)} & 7) \frac{(-4i)^5 + \overline{5i+i^3}}{(2-i)^2} & 8) \frac{\overline{(1+4i)^2 - (3-2i)}}{(-i) + (1+2i)^2}
 \end{array}$$

**Câu 2.** Tính modun của các số phức sau

$$\begin{array}{lll}
 1) z = \frac{(4-3i)^{12}(5+7i)^3}{(2+i)^{24}} & 2) z = \frac{(5+12i)^{26} \left( \sqrt{3+2i\sqrt{6}} \right)^2}{(10-24i)^{20}} & 3) z = \frac{\left( \sqrt{3+i\sqrt{6}} \right)^{22}}{\sqrt{2+i\sqrt{2}} \left( 3+3i\sqrt{3} \right)^{20}} \\
 4) z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{30} (-5+4i)^5}{(\sqrt{6}-i\sqrt{3})^{32}} & 5) z = \frac{(3\sqrt{3}-3i)^{12} (\overline{5-12i})^5}{(-2+2i\sqrt{3})^{10}} & 6) z = \frac{(-\sqrt{6}+i\sqrt{3})^{32}}{(1+i\sqrt{2})^7 (3-i)^{28}}
 \end{array}$$

**Câu 3.** Thực hiện các phép tính sau dưới dạng lượng giác và dạng mũ

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{(1-i\sqrt{3})(5+5i)^3}{(\sqrt{3}+i\sqrt{6})^2} & 2) \frac{(3+3i\sqrt{3})^2 (\sqrt{3}+i\sqrt{6})^2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} & 3) \frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{6})^2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2} (3+3i\sqrt{3})^2} \\
 4) \frac{(\sqrt{3}-i)(-4+4i)^3}{(\sqrt{6}+i\sqrt{3})^2} & 5) \frac{(3\sqrt{3}-3i)^2 (\sqrt{8}+i\sqrt{8})^2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} & 6) \frac{(-\sqrt{6}+i\sqrt{3})^2}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2} (3-3i)^2}
 \end{array}$$

**Câu 4.** Xác định argument chính  $\varphi \in (-\pi; \pi]$  của các số phức sau

$$\begin{array}{lll}
 1) z = \frac{(1+i)^4 (\sqrt{3}-i\sqrt{6})^3}{\sqrt{3}+i} & 2) z = \frac{(\overline{1+i})(\sqrt{3}+i)^3}{(-1-i)^4} & 3) z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5 (2\sqrt{6}-2i\sqrt{3})^4} \\
 4) z = \frac{(1+i)^4 \cdot \overline{\sqrt{3}+i}}{(\sqrt{3}-i\sqrt{6})^3} & 5) z = \frac{(\overline{1+i})^4}{(-1-i)^4 (\sqrt{3}+i)^3} & 6) z = \frac{(1+i)^7 (1-i)^5}{(2\sqrt{6}-2i\sqrt{3})^4}
 \end{array}$$

**Câu 5\*.** Cho các số phức  $z$  sau có argument chính là  $\varphi \in (-\pi; \pi]$ . Hãy viết  $z$  dưới dạng đại số và dạng mũ, từ đó suy ra  $\cos \varphi$  và  $\sin \varphi$  (không dùng máy tính!)

$$\begin{array}{llll}
 1) z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} & 2) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{3}} & 3) z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} & 4) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{1 + i\sqrt{3}} \\
 5) z = \frac{\sqrt{3} - i}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}} & 6) z = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{3}} & 7) z = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} & 8) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{\sqrt{3} + i}
 \end{array}$$

**Câu 6.** Dùng công thức Moirve, hãy tìm căn bậc bốn của các số phức trong câu 5 ở trên.

**Câu 7.** Trong mặt phẳng phức, hãy xác định tập hợp các điểm  $z$  thỏa mãn điều kiện sau

$$\begin{array}{llll}
 1) 1 \leq |z + i| < 3 & 2) |z - 1 + i| \leq 1 & 3) \text{Im}(\bar{z} - i) \leq 2 & 4) \text{Re}(iz) > 1 \\
 5) |2z - i| = 4 & 6) |z - 1| + |z + 1| = 4 & 7) 0 < \text{Re}(iz) \leq 1 & 8) \text{Im}(z - i) \geq 3
 \end{array}$$

**Câu 8.** Giải các phương trình sau trên trường số phức

$$\begin{array}{llll}
 1) z^4 - 5z^2 + 7 = 0 & 2) z^4 - 7z^2 + 25 = 0 & 3) z^4 - 3z^2 + 9 = 0 & 4) z^4 + 3z = 0 \\
 5) z^4 + 3z^2 + 7 = 0 & 6) z^4 + 4z^2 + 17 = 0 & 7) z^4 + 6z^2 + 17 = 0 & 8) z^4 - 8z = 0
 \end{array}$$

**Câu 9\*.** Giải các phương trình sau trên trường số phức

$$\begin{array}{ll}
 1) z^3 + (3 + 2i)z^2 + (5 + 8i)z + 3 + 6i = 0 & 2) z^3 + (1 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z - 3 - 6i = 0 \\
 3) z^3 + (4 - 3i)z^2 + (1 - 9i)z - 2 - 6i = 0 & 4) z^3 + (2 - 3i)z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 6i = 0 \\
 5) z^3 + (2 + 4i)z^2 + (5 + 8i)z + 10 = 0 & 6) z^3 - (2 - 4i)z^2 + (5 - 8i)z - 10 = 0
 \end{array}$$

## Chương 2. HÀM BIẾN PHỨC

**Câu 1.** Tính các giá trị  $f(z_0)$  sau

$$\begin{array}{ll}
 1) f(z) = i \text{Re}(i\bar{z} - 2z^3), z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{6}} & 2) f(z) = \frac{z^2 - iz}{\bar{z}}, z_0 = \cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} \\
 3) f(z) = i \text{Im}(\bar{z}^3 + iz), z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}} & 4) f(z) = \frac{z^2}{3z - i\bar{z}}, z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \\
 5) f(z) = \frac{i(\bar{z}^2 - 2iz^3)}{z}, z_0 = \sqrt{3}.e^{i\frac{5\pi}{6}} & 6) f(z) = \frac{\text{Re}(z^2 - iz)}{i\bar{z}}, z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 7) f(z) = (i\bar{z}^2 + z^2)^4, z_0 = i\sqrt{3} - 1 & 8) f(z) = 2iz^3 + 4\bar{z}^2, z_0 = 3 - i\sqrt{2}
 \end{array}$$

**Câu 2.** Xác định phần thực và phần ảo của các hàm biến phức sau

$$\begin{array}{llll}
 1) f(z) = i(i\bar{z} - 2z^3) & 2) f(z) = -i\frac{z - 1}{\bar{z}} & 3) f(z) = ie^{i\bar{z}} & 4) f(z) = \frac{z}{z - i\bar{z}} \\
 5) f(z) = \cos(iz) - i.\sin(iz) & 6) f(z) = \cos(i\bar{z}) - \sin(i\bar{z}) & 7) f(z) = e^{\bar{z}} & 8) f(z) = \frac{e^{\bar{z}^2}}{i}
 \end{array}$$

**Câu 3.** Xét tính khả vi của hàm  $f(z)$  và tính đạo hàm (nếu có) tại điểm  $z_0 = x_0 + iy_0$  thuộc miền khả vi

$$\begin{array}{llll}
 1) f(z) = \bar{z}^2 . \text{Im}(iz) & 2) f(z) = e^{i\bar{z}^2} & 3) f(z) = z . \text{Im}(i\bar{z}^2) & 4) f(z) = ie^{\bar{z}} \\
 5) f(z) = z \text{Re}(iz - |z|^2) & 6) f(z) = e^{|z-1|^2} & 7) f(z) = |z| . (iz) & 8) f(z) = e^{|\bar{z}^2 - i}
 \end{array}$$

**Câu 4.** Chứng tỏ các hàm sau là hàm điều hòa và tìm hàm giải tích  $f(z) = u + iv$  theo biến  $z$ , biết

1)  $u(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$  và  $f(-i) = \frac{i}{2}$

2)  $v(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$  và  $f(i) = \frac{2i}{3}$

3)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  và  $f(1 - i) = 1$

4)  $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$  và  $f(1 + i) = -i$

5)  $u(x, y) = e^x \cos y - y$

6)  $v(x, y) = e^y \cos x + 2x$

7)  $u(x, y) = e^x \sin y - y$

8)  $v(x, y) = e^y \sin x + 2x$

.....

### Chương 3. TÍCH PHÂN HÀM PHỨC

**Câu 1.** Viết phương trình tham số của các đoạn thẳng (hoặc đường parabol)  $C$  theo tham số  $t$  và tìm khoảng biến thiên của  $t$  dưới dạng  $t : a \rightarrow b$  trong các trường hợp sau

1)  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = 3 - 2i$  đến điểm  $z = -1 + 3i$ .

2)  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = -5 - 2i$  đến điểm  $z = -7 + 3i$ .

3)  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = 3 + 2i$  đến điểm  $z = -1 - 3i$ .

4)  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = -1 - 4i$  đến điểm  $z = -4 - i$ .

5)  $C$  là parabol  $y = x^2 - 2x$  nối từ điểm  $z = 1 - i$  đến điểm  $z = -2 + 8i$ .

6)  $C$  là parabol  $y = -x^2 - 3x$  nối từ điểm  $z = 1 - 4i$  đến điểm  $z = -1 + 2i$ .

7)  $C$  là parabol  $y = 2x^2 - x$  nối từ điểm  $z = 1 + i$  đến điểm  $z = -2 + 10i$ .

8)  $C$  là parabol  $y = 2x^2 + x$  nối từ điểm  $z = 1 + 3i$  đến điểm  $z = -1 + i$ .

**Câu 2.** Viết phương trình tham số của các đường tròn (hoặc đường elip)  $C$  theo tham số  $t$  và tìm khoảng biến thiên của  $t$  dưới dạng  $t : a \rightarrow b$  trong các trường hợp sau

1)  $C$  là đường tròn  $|z - 1 - i| = 1$  nối từ điểm  $z = 2 + i$  đến điểm  $z = 1 + 2i$  theo chiều âm.

2)  $C$  là đường tròn  $|z - 1 - i| = 1$  nối từ điểm  $z = 1$  đến điểm  $z = i$  theo chiều dương.

3)  $C$  là đường tròn  $|z + 2i| = 1$  nối từ điểm  $z = -3i$  đến điểm  $z = 1 - 2i$  theo chiều âm.

4)  $C$  là đường tròn  $|z + 1 + 2i| = 1$  nối từ điểm  $z = -2i$  đến điểm  $z = -2 - 2i$  theo chiều âm.

5)  $C$  là đường elip  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  nối từ điểm  $z = 2$  đến điểm  $z = -i$  theo chiều dương.

6)  $C$  là đường elip  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  nối từ điểm  $z = 2i$  đến điểm  $z = -1$  theo chiều âm.

7)  $C$  là đường elip  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  nối từ điểm  $z = -3i$  đến điểm  $z = -2$  theo chiều âm.

8)  $C$  là đường elip  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  nối từ điểm  $z = -2i$  đến điểm  $z = 3$  theo chiều dương.

**Câu 3.** Tính các tích phân sau

1)  $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot \operatorname{Re}(iz) dz$ ,  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = -2i$  đến điểm  $z = -1 + 3i$ .

2)  $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot \operatorname{Im}(iz) dz$ ,  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = i$  đến điểm  $z = -1 - i$ .

3)  $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot (z^2 - iz) dz$ ,  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = 2i$  đến điểm  $z = -3i$ .

4)  $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot (2z - iz^2) dz$ ,  $C$  là đoạn thẳng nối từ điểm  $z = 3$  đến điểm  $z = -1$ .

5)  $I = \int_C \bar{z} dz$ ,  $C$  có phương trình  $\begin{cases} x = 2t^2 - 2t \\ y = t \end{cases}$  nối từ điểm  $A(4; -1)$  đến điểm  $B(4; 2)$ .

6)  $I = \int_C \bar{z} dz$ ,  $C$  có phương trình  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$  nối từ điểm  $A(0; -1)$  đến điểm  $B(-2; 0)$  theo chiều âm.

7)  $I = \int_C \bar{z}^2 dz$ ,  $C: |z - i| = 1$  nối từ điểm  $z = 0$  đến điểm  $z = 1 + i$  theo chiều âm.

8)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2}$ ,  $C: |z| = \sqrt{2}$  nối từ điểm  $z = -1 - i$  đến điểm  $z = 1 + i$  theo chiều dương.

**Câu 4.** Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1)  $I = \oint_{|z+2+i|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 5}$       2)  $I = \oint_{|z+3-i|=2} \frac{z-1}{z^2 + 4z} dz$       3)  $I = \oint_{|z-4+i|=3} \frac{z+2}{z^2 - 3z} dz$

4)  $I = \oint_{|z+2i|=1} \frac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$       5)  $I = \oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{z^4 + 4z^2}$       6)  $I = \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3 - 1}$

**Câu 5.** Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1)  $I = \oint_{|z-1|=3} \frac{dz}{z^2 - 2z + 5}$       2)  $I = \oint_{|z-2|=2} \frac{dz}{z^2 - 4z + 5}$       3)  $I = \oint_{|z-1|=4} \frac{dz}{z^2 - 2z + 10}$

4)  $I = \oint_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$       5)  $I = \oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$       6)  $I = \oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^3 - 3z}$

**Câu 6.** Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1)  $I = \oint_{|z+3|=2} \frac{z+3}{(z^2 + 4z)^2} dz$       2)  $I = \oint_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z^2 + 4)^2} dz$       3)  $I = \oint_{|z-4+i|=3} \frac{z-1}{(z^2 - 3z)^2} dz$

4)  $I = \oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2(z-i)^3}$       5)  $I = \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z-2)^3}$       6)  $I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z-1)}$

**Câu 7\*.** Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$ ,  $C$  là cung tròn  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{45}{4}$  nối  $z = 2$  với  $z = -1$  theo chiều âm.

2)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$ ,  $C$  là cung tròn  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$  nối  $z = -1$  với  $z = 2$  theo chiều dương.

3)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ ,  $C$  là cung tròn  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$  nối  $z = 3$  với  $z = -1$  theo chiều âm.

4)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ ,  $C$  là cung tròn  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$  nối  $z = -1$  với  $z = 3$  theo chiều dương.

5)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$ ,  $C$  là cung tròn  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 13$  nối  $z = 3$  với  $z = -1$  theo chiều âm.

6)  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ ,  $C$  là cung tròn  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$  nối  $z = -1$  với  $z = 3$  theo chiều dương.

.....

### Chương 4. CHUỖI VÀ THẶNG DƯ

**Câu 1\*.** Tìm hình tròn hội tụ của các chuỗi

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{n^2}$       2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z + n}{2nz} \right)^n$       3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!}$       4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 1)^n$

**Câu 2\*.**

**2.1.** Khai triển Taylor các hàm số sau tại điểm  $z = a$

1)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $a = i$       2)  $f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$ ,  $a = 0$       3)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ ,  $a = 0$

**2.2.** Khai triển Laurent của hàm số  $f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z + 2)}$  trong các trường hợp sau

1) trong miền  $|z| < 1$       2) trong miền  $|z| > 2$       3) trong miền  $0 < |z + 1| < 1$

**Câu 3\*.** Khai triển Laurent các hàm số sau trong lân cận điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó

1)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z - 1)^2}$ , tại  $z = 1$       2)  $f(z) = \frac{1}{z(z + 1)^2}$ , tại  $z = -1$   
 3)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ , tại  $z = -2$       4)  $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ , tại  $z = 0$   
 5)  $f(z) = (z - 1) \cos \frac{1}{z - 1}$ , tại  $z = 1$       6)  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ , tại  $z = i$

**Câu 4.** Tìm, phân loại các điểm bất thường cô lập hữu hạn và tính thặng dư của các hàm số tại các điểm đó

1)  $f(z) = \frac{z + 2}{z(z - 1)^3}$       2)  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z^2 - 4)}$       3)  $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)^2}$   
 4)  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 2)^2}$       5)  $f(z) = \frac{z^4}{(z + 1)^3}$       6)  $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 1}$   
 7)  $f(z) = \frac{z}{z^4 + 5z^2 + 4}$       8)  $f(z) = \frac{z - 2i}{(z^2 + 4)^2}$       9)  $f(z) = \frac{1}{z^4 + i}$

**Câu 5.** Tính thặng dư tại  $\infty$  của các hàm số sau

1)  $f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 2}$       2)  $f(z) = \frac{1}{z^7 - z}$       3)  $f(z) = \frac{z^2}{z^9 + 2}$   
 4)  $f(z) = \frac{1}{z^2(z^3 - 1)}$       5)  $f(z) = \frac{z^3}{2 - z^7}$       6)  $f(z) = \frac{z}{z^{10} - 3}$   
 7)  $f(z) = \frac{1}{z^4(3 - z^2)}$       8)  $f(z) = \frac{z^2}{1 - 3z^7}$       9)  $f(z) = \frac{1}{2z^6 + 1}$

**Câu 6.** Áp dụng thặng dư tính các tích phân phức sau

1)  $I = \oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz, C : x^2 + y^2 = 2x.$

2)  $I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 1} dz, C$  là chu vi tam giác có các đỉnh là  $z = 0, z = 2 - 2i$  và  $z = 2 + 2i.$

3)  $I = \oint_C \frac{z^2 dz}{z^2 + 4}, C$  là biên của hình vuông có các đỉnh là  $z = \pm 2, z = \pm 2 + 4i.$

4)  $I = \oint_C \frac{e^{iz} dz}{4z^2 - \pi^2}, C : |z - i| = 2.$

5)  $I = \oint_C \frac{dz}{z^3 + 1}, C$  là elip  $2x^2 + y^2 = \frac{3}{2}.$

6)  $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}.$

**Câu 7.** Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực dạng lượng giác sau

1)  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \sin t}$

2)  $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}$

3)  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin t}$

4\*)  $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{5 - 3 \cos t}.$

5)  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 3 \cos t}$

6)  $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t}$

7)  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$

8\*)  $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{3 - 2 \cos t}.$

**Câu 8.** Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực suy rộng sau

1)  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 16}$

2)  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

3)  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

4)  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$

5)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$

6)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

7\*)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 1} dx$

8\*)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$

.....

**Chương 5. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE****Câu 1.** Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

1)  $f(t) = e^t \cos 3t - 3e^{-2t} \sin 4t + \frac{t^3}{e^{5t}}$

2)  $f(t) = e^{-t} \sin 2t - 3e^{2t} \cos \frac{t}{2} + t^4 e^{-3t}$

3)  $f(t) = (t^5 - 2t^2 + 4)e^{-3t} + \frac{2 \cos 3t}{e^{2t}}$

4)  $f(t) = (t^5 + t^2 - 3t)e^{2t} + \frac{\sin 3t}{e^{-t}}$

5)  $f(t) = 3te^{2t}u(t-2)$

6)  $f(t) = (t-1)e^{-t}u(t-3)$

7)  $f(t) = 3t^2 \sin 2t - t \cos 3t$

8)  $f(t) = 2t^2 \cos 3t + (t-1) \sin 2t$

**Câu 2.** Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

1)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \leq t < 4 \\ 1 - 3t, & t \geq 4 \end{cases}$

2)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \leq t < 5 \\ 4 - 3t, & t \geq 5 \end{cases}$

3)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ -2t^2, & 3 \leq t < 4 \\ t^2 - 2t, & t \geq 4 \end{cases}$

4)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -4t^2, & 2 \leq t < 5 \\ t^2 + 5t, & t \geq 5 \end{cases}$

5)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

6)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

**Câu 3.** Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn sau

1)  $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}, T = 4$

2)  $f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \leq t \leq 5 \end{cases}, T = 5$

3)  $f(t) = \begin{cases} t^2 - 2t, & 0 \leq t < 1 \\ -2t^2, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}, T = 3$

4)  $f(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 2t^2 + t, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}, T = 3$

5)  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$

6)  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$

**Câu 4.** Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

1)  $F(s) = \frac{s-5}{s^2+8s+25} + \frac{s}{s^2+8s+16}$

2)  $F(s) = \frac{3-s}{s^2-8s+25} + \frac{s}{s^2-8s+16}$

3)  $F(s) = \frac{s}{s^2+10s+29} + \frac{4-s}{s^2+10s+25}$

4)  $F(s) = \frac{s}{s^2-10s+29} + \frac{4-s}{s^2-10s+25}$



$$5) F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} + \frac{e^{-3s}}{s^2 + 10s + 25}$$

$$6) F(s) = \frac{se^{-5s}}{s^2 + 9} + \frac{e^{-s}}{s^2 - 10s + 25}$$

$$7) F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5}$$

$$8) F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 6s + 18}$$

**Câu 5.** Bằng cách phân tích thành phân thức tối giản, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s^2 - 5s}{s^3 + 2s^2 - 11s - 12}$$

$$2) F(s) = \frac{s^2 - 5s + 3}{s^3 - 13s + 12}$$

$$3) F(s) = \frac{s}{s^3 + 3s^2 - 10s - 24}$$

$$4) F(s) = \frac{s}{s^3 - s^2 - 14s + 24}$$

$$5) F(s) = \frac{s - 1}{(s^2 + 1)(s - 4)}$$

$$6) F(s) = \frac{s + 2}{(s^2 + 4)(s + 9)}$$

$$7) F(s) = \frac{s - 3}{s(s - 1)^2}$$

$$8) F(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)^2}$$

**Câu 6.** Sử dụng thặng dư, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s}{(s - 1)^2(s + 2)^2}$$

$$2) F(s) = \frac{s}{(s - 1)^3(s + 2)}$$

$$3) F(s) = \frac{s - 2}{(s - 3)^2(s + 2)^2}$$

$$4) F(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)^3}$$

$$5) F(s) = \frac{s}{(s - i)(s^2 + 1)}$$

$$6) F(s) = \frac{s}{(s - 2i)(s^2 + 4)}$$

$$7) F(s) = \frac{1}{(s - i)(s^2 + 2is + 3)}$$

$$8) F(s) = \frac{1}{(s + 3i)(s^2 + 2is + 3)}$$

**Câu 7\*.** Sử dụng tích chập, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)}$$

$$2) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 3)}$$

$$3) F(s) = \frac{3}{(s^2 + 1)s^3}$$

$$4) F(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + 4)}$$

$$5) F(s) = \frac{s}{(s + 1)^2(s^2 + 1)}$$

$$6) F(s) = \frac{s}{(s - 2)^2(s^2 + 4)}$$

$$7) F(s) = \frac{2 - s}{(s^2 + 4)^2}$$

$$8) F(s) = \frac{3 - s}{(s^2 + 9)^2}$$

**Câu 8.** Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp một sau

$$1) y' + 2y = 3e^{-2t}; y(0) = 1$$

$$2) y' - 2y = 3e^{2t}; y(0) = -1$$

$$3) y' + 5y = 3e^{-5t}; y(0) = -2$$

$$4) y' - 6y = -e^{6t}; y(0) = 3$$

$$5) y' + 4y = -2e^{-t}$$

$$6) y' - 7y = -e^t$$

$$7) y' + 2y = t; y(0) = 1$$

$$8) y' - 2y = t; y(0) = -2$$

**Câu 9.** Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

$$1) y'' - 3y' + 2y = e^{3t}; y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$2) y'' + 4y' + 3y = e^{-2t}; y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = e^t; y(0) = 0, y'(0) = -1$$

$$4) y'' + 4y' + 3y = e^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$5) y'' - 4y' + 4y = e^t; y(0) = 0, y'(0) = -1$$

$$6) y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$7) y'' - 3y' + 2y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$8) y'' + 4y' + 3y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

**Câu 10\*.** Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

$$1) y'' - 2y' + 5y = 3; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$2) y'' + 4y' + 8y = -1; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$3) y'' + 4y = te^t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$4) y'' + 9y = te^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$5) y'' - 4y' + 4y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$6) y'' + 6y' + 9y = 2t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$7) y'' - 2y' + 5y = 3t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$8) y'' + 4y' + 8y = -t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

**Câu 11.** Dùng biến đổi Laplace giải các hệ phương trình vi phân cấp một sau

$$1) \begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}; x(0) = 8, y(0) = 3$$

$$2) \begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases}; x(0) = 3, y(0) = 15$$

$$3) \begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t} \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases}; x(0) = 2, y(0) = 0$$

$$4) \begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}; x(0) = y(0) = 0$$

.....Hết.....