Chương 1. Số phức

1.1. Số phức và các phép toán

1.1.1. Các định nghĩa

- Số phức là số có dạng $z = x + iy$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$. Số i thỏa mãn $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.
- x được gọi là phần thực của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$.
- y được gọi là phần ảo của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.
- Đặc biệt, $z = x + i0$ là số thực. $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Ví dụ 1. $\operatorname{Re}(2-3i) = 2;\quad \operatorname{Im}(2-3i) = -3$

- Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1;\ z_2 = x_2 + iy_2$ được gọi là bằng nhau nếu $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Ví dụ 2. $2x + i\sqrt{3} = -4 - iy \Leftrightarrow x = -2; y = -\sqrt{3}$

- Số phức $\bar{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = x + iy$.

Ví dụ 3. $\overline{-2-3i} = -2 + 3i$; $\overline{i\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}$.

- Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$. $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

1.1.2. Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1;\ z_2 = x_2 + iy_2$ ta định nghĩa các phép toán như sau

a)Phép cộng và trừ số phức

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Chú ý. Phép cộng số phức có tính giao hoán và kết hợp.

Ví dụ 4. $(2+i) + (-1-i) = 1;\ -3i - (-1+5i) = 1 - 8i$

b)Phép nhân số phức

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Phép nhân số phức có các tính chất như nhân số thực

Ví dụ 5. $-i\sqrt{2}(-1+i) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

c)Phép chia số phức

Giả sử $z_2 \neq 0$, khi đó ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ví dụ 6. $\dfrac{1-i}{2+i} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

d)Lũy thừa bậc n của số phức

$$z^n = z.z...z \text{ (n số z)}$$

e)Căn bậc n của số phức

$$\mathrm{w} = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = \mathrm{w}^n$$

Ví dụ 7. Tính $\sqrt{3+4i}$

Định lý. Cho $z = x + iy; z_1 = x_1 + iy_1;\ z_2 = x_2 + iy_2$, ta có:

1) $\overline{\overline{z}} = z; \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \ \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

2) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z = 2x$; $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z = 2iy$

3) $z.\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\left(z_2 \neq 0\right)$

1.2. Dạng lượng giác của số phức công thức Moivre, Công thức Euler

1.2.1. Dạng lượng giác của số phức

a) Mặt phẳng phức

Về mặt hình học, số phức $z = x + iy$ được biểu diễn bằng điểm $M\left(x, y\right)$ trong mặt phẳng tọađộ Descartes vuông góc Oxy. Khi đó, mặt phẳng Oxy được gọi là *mặt phẳng phức*.

Trong mặt phẳng phức, ta có:

$\operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z \in 0x; \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z \in 0y.$

Do đó: Trục hoành 0x được gọi là *trục thực*.

Trục tung 0y được gọi là *trục ảo.*

b) Modul và argument của số phức

Trong mặt phẳng phức,khoảng cách r từ gốc tọa độ O đến điểm M được gọi là modul của z, ký hiệu là $|z|$. Modul của z được xác định bởi:

$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Góc định hướng $\varphi = \left(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{OM}\right)$ có tia đầu 0x và tia cuối OM, được gọi là argument của z.

Argument φ của z thỏa mãn $-\pi < \varphi < \pi$ được gọi là *argument chính*. Ký hiệu là argz.

Nếu z là số thực dương thì $\arg z = 0$.

z là số thực âm thì $\arg z = \pi$.

$z = 0$ thì argument của z không xác định.

Ký hiệu tập hợp tất cả argment của z là Argz.

Vậy $\operatorname{Arg} z = \arg z + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Quy ước. Khi không nói rõ φ thuộc khoảng nào thì ta hiểu φ là argment chính.

Cách xác định argument chính của $z = x + iy$

Bước 1. Xác định điểm M biểu diễn z trên mặt phẳng 0xy.

Bước 2. $\arg z = \varphi$ thỏa mãn $\cos\varphi = \frac{x}{r}, \sin\varphi = \frac{y}{r}, -\pi < \varphi \leq \pi$ và phụ thuộc vào vị trí của M.

Ví dụ 1. Xác định modul và argument của các số phức:

$a)\ z = i;$ $\qquad b)\ z = -\sqrt{3} - i$

c) Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x + iy$ có $|z| = r; \arg z = \varphi$

Ta có: $z = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)$. Vậy dạng lượng giác của số phức z là:

$$z = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)$$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$a)\ z = -4;$ $\quad b)\ z = 1 - i\sqrt{3};$ $\quad c)\ z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Nhận xét.

Nếu $z = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)$ thì: $\bar{z} = r\left(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi\right)$

Nếu $z \in \mathbb{R}, z = x + i0$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$

1.2.2. Công thức Moivre

Cho số phức $z = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)$ khi đó

1) $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\right),\ n \in \mathbb{N}$

2) $\sqrt[n]{z} = \omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)$ $\left(n \in \mathbb{N}, n \ge 2, k = \overline{0, n-1}\right)$

Ví dụ 3. Tính $a)\ (1-i)^{100};$ $\quad b)\ \sqrt[3]{8}$

1.2.3. Công thức Euler

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Dựa vào công thức Euler, số phức z có $|z| = r$ và $\arg z = \varphi$ có thể được viết dưới dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$.

Ví dụ 4. Viết các số phức sau dưới dạng mũ:

$a)\ z = -3;$ $\quad b)\ z = -i;$ $\quad c)\ z = -\sqrt{3} + i$

Nhận xét.

1) Nếu $z = re^{i\varphi}$ thì $\bar{z} = re^{-i\varphi}$

2) Với mọi $z_1 = x_1 + iy_1;\ z_2 = x_2 + iy_2$, ta gọi $|z_1 - z_2| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$ là khoảng cách giữa z_1 và z_2 .

Khi đó $|z - a| = r$ hay $z = a + re^{i\varphi}\ \left(\varphi \in [0, 2\pi]\right)$ là đường tròn tâm a, bán kính r.

Công thức cần nhớ.

Với $z = re^{i\varphi};\ z_1 = r_1e^{i\varphi_1} = r_1\left(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1\right);\ z_2 = r_2e^{i\varphi_2} = r_2\left(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2\right)$, ta có:

1) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + \mathrm{i}\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$

3) $z^n = r^ne^{in\varphi}, n \in \mathbb{N}$

4) $\sqrt[n]{z} = \omega_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + k2\pi}{n}}$ $\left(n \ge 2, k = \overline{0, n-1}\right)$

Bài tập.

Câu 1. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng lượng giác và dạng mũ

1) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(5+5i\right)^3}{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)^2}$ 2) $\dfrac{\left(3+3i\sqrt{3}\right)^2\overline{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)}^2}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$

Câu 2. Cho số phức z sau có argument chính $\varphi \in \left(-\pi, \pi\right)$. Hãy viết z dưới dạng đại số và dạng mũ

1) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1.3. Đường và miền trong mặt phẳng phức

1.3.1. Đương trong mặt phẳng phức

a)Phương trình tham số

- Giả sử $x(t)$, $y(t)$ là các hàm thực, xác định và liên tục trên $[a;b]$ của đường thẳng thực. Khi đó phương trình:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \le t \le b$$

biểu diễn tham số một đường cong L trong mp phức.

- Các điểm $z(a)$, $z(b) \in L$ lần lượt được gọi là điểm đầu và điểm cuối của đường cong L.

Ví dụ 1. a) Đường tròn tâm O bán kính r có phương trình:

$$z = r(\cos t + i\sin t) = r\cos t + i.r\sin t.\ t \in [0; 2\pi].$$

b) Đoạn thẳng nối điểm O và điểm $(1+i)$ có phương trình là $z = l + it,\ t \in [0;1]$

Ví dụ 2. Xác định đường cong có phương trình:

$$z = t + \tfrac{i}{t}\ (0 < t < +\infty).$$

Giải. Từ $z = t + \tfrac{i}{t}$, ta suy ra $x = t > 0$ và $y = \dfrac{1}{t}$.

Khử t, ta được $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$.

Vậy đường cong đã cho là nhánh hyperbol $y = \dfrac{1}{x}$ nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng phức.

b) **Phân loại đường cong**

- Đường cong có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là đường cong đóng (khép kín).
- Đường cong không có điểm tự cắt được gọi là đường cong Jordan. Đường cong Jordan đóng còn được gọi là chu tuyến.
- Đường cong L được gọi là trơn nếu các hàm số $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm liên tục và khác 0 trên đoạn $[a;b]$, có nghĩa là mọi điểm của L đều có tiếp tuyến.
- Đường cong tạo bởi một số hữu hạn các đường cong trơn được gọi là đường cong trơn từng khúc.

1.3.2. Miền trong mặt phẳng phức

a) Lân cận và miền

- Lân cận $\varepsilon > 0$ của $z_0(\neq \infty)$ là hình tròn mở tâm tại z_0:

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \; |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Lân cận ε của điểm $z = \infty$ là $|z| > \varepsilon$.

- Tập $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là một miền trong mặt phẳng phức nếu thỏa mãn được hai điều kiện sau:

1) Với mọi $z_0 \in D$, tồn tại lân cận $U_\varepsilon(z_0) \subset D$.
2) Với mọi $a, b \in D$, tồn tại đường cong $L \in D$ có điểm đầu là a, điểm cuối là b.

Ví dụ 3.

a) Tập $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - i| < 1\}$ là 1 miền.

b) Tập $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\} U \{z \in \mathbb{C} : lm(z) < 0\}$ không là miền vì với $a, b \in D$, ta có thể chỉ ra được đường cong L có điểm đầu là a, điểm cuối là b, nhưng L khoong nằm trong D.

b) Biên và chiều của biên

Điểm z_0 được gọi là điểm biên của miền D nếu trong lân cận bất kỳ của z_0 đều có chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D.

Tập hợp các điểm biên của miền D được gọi là điểm biên của D, ký hiệu ∂D.

Nếu D là một miền thì $\overline{D} = D \cup \partial D$ được gọi là miền đóng hay miền kín.

Quy ước. Chiều dương của biên ∂D là chiều mà khi ta đi dọc theo biên sẽ thấy miền D nằm về phía tay trái.

c) Miền đơn liên, miền đa liên

Xét miền D giới hạn bởi chu tuyến γ. Miền này được gọi là miền đơn liên, γ chính là ∂D.

Nếu D được giới hạn bởi hai chu tuyến γ_1, γ_2 không giao nhau, thì miền D được gọi là miền nhị liên. Khi đó $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Tương tự ta có thể định nghĩa miền tam liên, tứ liên...

Chương 2. Hàm biến phức

2.1. Hàm biến phức

2.1.1. Định nghĩa.

Quy tắc f cho tương ứng mỗi $z \in D \subset \mathbb{C}$ với một hay nhiều giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ được gọi là một hàm biến phức z.

Tập D được gọi là miền xác định của f.

Nếu mỗi $z \in D$ ứng với một giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là *hàm đơn trị*, nếu mỗi $z \in D$ ứng với nhiều giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là *hàm đa trị*.

Ví dụ 1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ là hàm đơn trị có MXĐ $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Trong $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = f(z) = \sqrt{z}$ là hàm hai trị.

Ví dụ 2. Cho $f(z) = z - 3\operatorname{Im} z$. Tính $f(1), f(-2i), f(1-2i)$

Ví dụ 3. Cho $f(z)=3z+\bar{z}^2$. Tính $f(-1+3i)$

2.1.2. Phần thực và phần ảo của hàm biến phức

Với mỗi $z\in D$, $\omega=f(z)\in\mathbb{C}$ nên ta có thể viết: $\omega=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Các hàm $u(x,y)=\operatorname{Re}w,\ v(x,y)=\operatorname{Im}w$ lần lượt được gọi là phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$.

Ví dụ 4. Xác định phần thực và phần ảo của hàm $\omega=z^2+(1-i)\bar{z}$

Ví dụ 5. Xác định phần thực và phần ảo của hàm $\omega=z-\frac{1}{z}$

c) Hàm khả tích

Định nghĩa.

- Hàm $\omega=f(z)$ khả vi trong một lân cận của z được gọi là giải tích (còn gọi là chỉnh hình) tại z.

Điểm z mà tại đó hàm $\omega=f(z)$ không giải tích được gọi là điểm bất thường của z.

- Hàm $\omega=f(z)$ khả vi tại mọi điểm z thuộc miền D thì được gọi là giải tích trong miền D.

Chú ý.

- Hàm $\omega=f(z)$ giải tích tại điểm z_0 thì khả vi tại z_0, ngược lại nói chung không đúng.

Chẳng hạn, hàm $f(z)=z.\bar{z}$ khả vi tại $z=0$ nhưng không giải tích tại điểm đó.

- Hàm $\omega=f(z)$ giải tích trên miền mở D khi và chỉ khi $f(z)$ khả vi trên D.

Ví dụ 6. a) Hàm $\omega=\bar{z}$ không giải tích tại $\forall z\in\mathbb{C}$.

b) Hàm $\omega=z^n$ khả vi tại $\forall z\in\mathbb{C}$ nên giải tích trong $\mathbb{C}$.

c) Hàm $\omega=\frac{z}{z^2+1}$ giải tích tại $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$.

Hai điểm $z=\pm i$ là điểm bất thường của hàm ω.

2.2. Tính liên tục của hàm biến phức

2.2.1. Giới hạn của hàm biến phức

Đinh nghĩa. Cho hàm biến phức $f(z)$ xác định trong lân cận của z_0 (có thể trừ điểm z_0). Số phức $a\neq\infty$ được gọi là giới hạn của $f(z)$ khi $z\to z_0$, ký hiệu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$, nếu:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-a|<\varepsilon$.

Hàm phức $f(z)$ được gọi là có giới hạn ∞ khi $z\to z_0$, ký hiệu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, nếu:

$\forall M>0,\exists\delta>0:|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)|>M$

Các giới hạn $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a,\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ được định nghĩa tương tự.

Định lý. Nếu hàm phức $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$ và $a=\alpha+i\beta$ thì:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha,\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$

2.2.2. Hàm số liên tục

Định nghĩa. Cho hàm $f(z)$ xác định trong miền chứa z_0. Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục trong miền B nếu $f(z)$ liên tục tại mọi điểm $x \in B$.

Nhận xét.

Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ thì $u(x,y)$ và $v(x,y)$ liên tục tại (x_0, y_0).

Các tính chất và phép tính giới hạn tương tự làm như hàm thực hai biến.

Ví dụ 8. a) $\lim_{z \to 1+i} (z^2 + i) = (1+i)^2 + i = 3i$.

b) Hàm phức $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.3. Hàm giải tích

2.3.1.Đạo hàm của hàm biến phức

a) *Định nghĩa*

Cho hàm $\omega = f(x)$ xác định trong miền D chứa điểm $z = x + iy$. Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Gọi $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$ là một số gia tương ứng của $f(z)$.

Nếu tỉ số $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta z \to 0$ (theo mọi cách) thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $\omega = f(z)$ tại điểm z. Kí hiệu $f'(z)$.

Ta có: $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Chú ý.

- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì được gọi là khả vi tại điểm z.
- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì liên tục tại điểm z.
- Đạo hàm của hàm biến phức có các tính chất và quy tắc tương tự hàm biến số thực.

Ví dụ 1. Xét hàm $f(z) = z^2$, ta có:

$$\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z) = 2z.\Delta z + (\Delta z)^2 \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z \Rightarrow f'(z) = 2z.$$

Ví dụ 2. Xét hàm $f(z) = \overline{z}$, ta có:

$$\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z) = \overline{z+\Delta z} - \overline{z} = \overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i\Delta y} = \Delta x - i\Delta y$$

- Nếu $\Delta z \to 0$ theo trục thực thì $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 1$
- Nếu $\Delta z \to 0$ theo trục ảo thì $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = -1$

Vậy hàm $f(z)=\overline{z}$ không khả vi tại mọi điểm $z \in \mathbb{C}$.

b) Điều kiện khả vi Cauchy – Reimann

Định lý.

- Nếu hàm $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ khả vi tại $z=x+iy$ thì các hàm hai biến thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện C-R:

$$u_x{}' = v_y{}' \text{ và } u_y{}' = -v_x{}'$$

- Ngược lại, nếu hàm hai biến thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện C-R thì hàm $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ khả vi tại $z=x+iy$ và:

$$f(z)=u_x{}'+iv_x{}'$$

Nhận xét.

Do $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ nên ta có:

$$f_{\overline{z}}{}' = f_x{}'.x_{\overline{z}}{}' + f_y{}'.y_{\overline{z}}{}' = \frac{1}{2}f_x' - \frac{1}{2i}f_y' = \frac{1}{2}\left[\left(u_x{}'+iv_x'\right)+i\left(u_y{}'+iv_y'\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(u_x{}'-v_x'\right)+i\left(u_y{}'+v_x'\right)\right].$$

Vậy điều kiện C-R tương đương với: $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_z' = 0$.

Ví dụ 3. Xét hàm $\omega = z^2$, ta có: $u=x^2-y^2,\ v=2xy$.

Do $\begin{cases} u_x' = 2x = v_y' \\ u_y' = -2x = -v_x' \end{cases}$ nên $\omega = z^2$ khả vi trên $\mathbb{C}$.

Ví dụ 4. Xét hàm $f(z)=z.\mathrm{Re}\,z$, ta có: $f(z)=u=x^2+ixy \Rightarrow u=x^2,\ v=xy$.

Điều kiện C-R: $\begin{cases} u_x' = v_y' \\ u_y' = -v_x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $f(z)=z.\mathrm{Re}\,z$ khả vi tại $z=0$ và $f'(0)=u_x'(0;0)+iv_x'(0;0)=0$.

Ví dụ 5. Xét tính khả vi của hàm $\omega = 3\mathrm{Re}\,z-\overline{z}$.

2.3.2. Điều kiện để hàm biến phức giải tích

- Nếu $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là hai hàm điều hòa liên hợp (nghĩa là thõa mãn điều kiện C-R) trong D thì hàm $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ giải tích trong D.

Nhận xét.

- Cho trước một hàm điều hòa, ta có thể tìm được hàm điều hòa liên hợp với nó (sai khác 1 hằng số). Vì vậy, khi cho trước phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích, ta có thể tìm thấy được hàm giải tích đó (sai khác 1 hằng số).

Ví dụ 3. Tìm hàm giải tích $f(x)$.

Cho biết phần thực $u=x^2-y^2+2x$ và $f(0)=0$.

2.3. Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hòa

2.3.1. Hàm điều hòa

- Định nghĩa.

Hàm hai biến thực $u(x,y)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền D nếu $u(x,y)$ thỏa mãn phương trình Laplace: $\Delta u = u^{n}_{x^2} + u^{n}_{y^2} = 0$.

Ví dụ 1. a) Hàm $u = x^2 - y^2$ là hàm điều hò vì $u^{n}_{x^2} + u^{n}_{y^2} = 2 - 2 = 0$.

b) Hàm $u = \ln\left(x^2 - y^2\right)$ là hàm điều hòa trong toàn mặt phẳng trừ gốc tọa độ.

- Định lý.

Nếu hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ là hàm giải tích trong miền D thì $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là các hàm điều hòa trong miền D.

Ví dụ 2. Hàm $\omega = e^x(\cos y + i\cos y)$ giải tích trong D.

2.4. Các hàm số sơ cấp

2.4.1. Hàm số hữu tỉ

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Các trường hợp riêng của hảm hữu tỉ

- Hàm tuyến tính: $f(z) = az + b,\ D \in \Box$.
- Hàm lũy thừa: $f(z) = z^n.n \in \Box,\ D \in \Box$.
- Hàm đa thức: $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,\ D \in \Box$.
- Hàm phân tuyến tính: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ D \in \Box \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

2.4.2. Hàm mũ và Logarit

a) Hàm mũ

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Tính chất. •Nếu $z = x$ thì $e^z = e^x$.

•$\left|e^z\right| = \left|e^x\right| > 0,\ \forall z \in \Box$.

•$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

•Hàm $\omega = e^z$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi i$.

•Hàm $\omega = e$ khả vi với mọi $z \in \Box$ và $\left(e^z\right)^l = e^z$.

b) Hàm Logarit $\mathrm{w} = Lnz$

- Định nghĩa

Với $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r.e^{i\varphi}$, ta có: $\ln z = Inr + i(\varphi + k2\pi), (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Chọn $k = 0$ và ký hiệu Lnz, ta được: $Lnz = Inr + i\varphi, (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

- Tính chất

• Hàm Lnz là hàm đơn trị xác định trên $\Box \setminus \{0\}$.

• $Lnz(z_1.z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$.

• Hàm $\mathrm{w} = Lnz$ khả vi $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $(Lnz)' = \frac{1}{z}$.

2.4.3. Các hàm lượng giác và hyperbol

- Hàm cosin: $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$.
- Hàm sin: $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$.
- Hàm cosin hyperbol: $chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$.
- Hàm sin hyperbol: $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\sin(iz)$.

Tất cả các tính chất và công thức lượng giác đã biết cũng đúng với các hàm lượng giác phức. Các hàm hyperbol xác định liên tục trên $\mathbb{C}$.

Bài tập chương 2.

Bài 1. Khảo sát tính chỉnh hình của hàm phức $f(z) = \overline{z}^2 + 2|z|^2$

Bài 2. Xét tính khả vi của hàm $f(z)$ và tính đạo hàm(nếu có) tại điểm $z_0 = x_0 + y_0$ thuộc miền khả vi.

1) $f(z) = \overline{z}^2\,\mathrm{Im}(iz)$ 2) $f(z) = e^{i\overline{z}^2}$

Bài 3. Cho ánh xạ phân tuyến tính f thỏa mãn biến các điểm $z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = \infty$ lần lượt thành các điểm $\mathrm{w}_1 = 0; \mathrm{w}_2 = \infty; \mathrm{w}_3 = 2i$. Tính $f(2i)$

Chương 3. Tích phân hàm phức

3.1. Tích phân đường của hàm phức

3.1.1. Định nghĩa

Cho đường cong định hướng Jordan C, trơn từng khúc, có phương trình: $z(t) = x(t) + iy(t),\ t : a \to b$ và hàm phức $f(z)$ xác định liên tục trên C. Chia C thành n điểm chia liên tiếp: $z(a) = z_0, z_1, ..., z_n = z(b)$. Trên mỗi cung $z_{k-1}z_k$ ta chọn tùy ý điểm $t_k\left(k = \overline{1,n}\right)$ và lập tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1})$.

Nếu khi $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \to 0$, tổng S_n dần đến giới hạn là $I \in \mathbb{C}$ (không phụ thuộc vào cách chia và chọn điểm t_k) thì I được gọi là tích phân của $f(z)$ dọc theo C hướng từ z_0 đến z_n. Ký hiệu $\int_C f(z)dz$

- Nếu đường cong có điểm đầu và cuối lần lượt là A, B thì ta ký hiệu $\int_{AB} f(z)dz$.

- Nếu đường cong có điểm đầu và cuối trùng nhau thì ta ký hiệu $\oint_C f(z)dz$ với chiều của C là chiều dương.

3.1.2. Tính chất

Tích phân đường hàm phức dọc theo C có các tính chất như tích phân đường loại 2:

- $\int_C [af(z)+bg(z)]dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$
- Nếu $C = C_1 \cup C_2;\ C_1 \cap C_2 = \varnothing$ thì $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$
- $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$
- Gọi L là độ dài của đường C và $M = \max_{z\in C}|f(z)|$, ta có công thức ước lượng tích phân: $\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$

3.1.3. Phương pháp tính

a) Đưa về tích phân xác định

Nếu phương trình của C: $z(t) = x(t) + iy(t),\ t: a \to b$ thì

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_C (\bar{z})^2 dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ gốc tọa độ O đến điểm 1+i.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_C (\bar{z})^2 dz$, trong đó C là nửa đường tròn đơn vị nối từ $z=-1$ đến $z=1$.

b) Biểu diễn tích phân theo phần thực và ảo của $f(z)$

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int_C \bar{z}dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2+i$ đến điểm $z=0$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $\int_C (1+i-2\bar{z})dz$, trong đó C là cung parabol $y = x^2$ nối từ điểm $z=0$ đến điểm $z=1+i$.

3.2. Định lý Cauchy

3.2.1. Định lý Cauchy cho miền đơn liên

a) Định lý. Nếu $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và liên tục trên biên $C = \partial D$ thì

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Ví dụ 1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{z^2+4}dz = 0$

b) Hệ quả

- Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và C là đường cong kín nằm trong D thì $\oint\limits_C f(z)dz = 0$.
- Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D, thì tích phân $\oint\limits_C f(z)dz$ với mọi đường cong C nằm trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối nhận giá trị như nhau.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int\limits_C 2zdz$, trong đó C là cung $y = x^3 - 3x^2$ nối $z = 0$ với $z = 1 - 2i$.

3.2.2. Định lý Cauchy cho miền đa liên

a) Định lý 1. Cho miền D – n liên $(n > 1)$ có biên ∂D gồm $C_1, C_2, ..., C_n$ trong đó C_1 bao các chu tuyến khác và các chu tuyến $C_2, ..., C_n$ nằm ngoài nhau. Nếu $f(z)$ giải tích trong D và liên tục trên biên thì $\oint\limits_{C_1} f(z)dz = \oint\limits_{C_2} f(z)dz + \oint\limits_{C_3} f(z)dz + ... + \oint\limits_{C_n} f(z)dz$

b) Định lý 2. Với giả thiết như trong định lý 1, ta có: $\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$

Ví dụ. Tính tích phân $I = \int\limits_\gamma \frac{dz}{4z^2+9}$ trong đó γ là chu tuyến trơn không đi qua $\pm\frac{3i}{2}$

3.3. Tích phân bất định. Công thức Newton – Leibnitz

3.3.1. Tích phân bất định

Hàm giải tích $F(z)$ được gọi là nguyên hàm của hàm giải tích $f(z)$ trong miền D nếu $F'(z) = f(z)$. Khi đó, $F(z) + C$ (với C là hằng số phức) cũng là nguyên hàm của $f(z)$. Tập tất cả các nguyên hàm của $f(z)$ có dạng $F(z) + C$ và được gọi là tích phân bất định của $f(z)$. Ký hiệu là $\int f(z)dz$.

3.3.2. Công thức Newton – Leibnitz

- Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ trong D thì:

  $$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_1) - F(z_2), \forall z_1, z_2 \in D$$

Chú ý.

- Tích phân hàm $f(z)$ dọc theo đường cong C chỉ được áp dụng công thức Newton – Leibnitz nếu C nằm trong miền đơn liên mà trong đó hàm $f(z)$ giải tích.
- Các phương pháp tính tích phân đổi biến và từng phần đã biết vẫn đúng cho tích phân phức.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_C 3z^2 dz$, trong đó:

C là đường cong nối điểm $z = 1$ và $z = 2$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_1^{1+i} z(z-1)^{100} dz$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int_0^{i\pi} ze^z dz$.

Bài tập.
Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_C \bar{z}^2 . \mathrm{Re}(iz) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = -1+3i$

1) $I = \int_C \bar{z}^2 .(z^2 - iz) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2i$ đến điểm $z = -3i$

b) Biểu diễn tích phân theo phần thực và ảo của $f(z)$

$\int_C f(z) dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int_C \bar{z} dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2+i$ đến điểm $z = 0$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $\int_C (1+i-2\bar{z}) dz$, trong đó C là cung parabol $y = x^2$ nối từ điểm $z = 0$ đến điểm $z = 1+i$.

CHƯƠNG IV. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

4.1. Phép biến đổi Laplace

4.1.1.Định nghĩa biến đổi Laplace.

Định nghĩa. Giả sử $x(t)$ là hàm số thực xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi laplace của hàm số $x(t)$ được định nghĩa và ký hiệu:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$$

với s là biến số phức, $x(t)$ được gọi là hàm gốc, $X(s)$ được gọi là hàm ảnh của phép biến đổi.

Phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được gọi là tồn tại nếu tích phân hội tụ với giá trị s thuộc miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ không tồn tại.

Nhận xét.

1. L là kí hiệu của toán tử Laplace, tác động lên hàm số $x(t)$ thu được hàm số $X(s)$. Miền xác định chứa biến số phức thường được gọi là miền tần số phức.

2. Cận dưới của phép tính tích phân bằng 0, điều đó có nghĩa phép biến đổi đã bỏ mất thông tin phần $t<0$ của hàm gốc $x(t)$. Lúc này $X(s)$ chỉ mang thông tin về $x(t)$ với $t \ge 0$. Tuy nhiên vấn đề này không gặp trở ngại gì trong các bài toán ứng dụng.

Hàm $x(t)$ được gọi là hàm nhân quả nếu $x(t)=0$ khi $t<0$

Định nghĩa hàm nhảy đơn vị

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$$

Nhân hàm $x(t)$ với $\eta(t)$ ta có $x(t)\eta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ x(t) & t\ge 0\end{cases}$ là một hàm nhân quả. Từ đây có nhận xét rằng $X(s)$ mang đầy đủ thông tin về $x(t)\eta(t)$.

Ví dụ 1. Tìm biến đổi Laplace của $x(t)=c,\ c$: const

$$L\{c\}=\int_0^\infty ce^{-st}dt=c\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt=\frac{c}{s}\left(1-\lim_{T\to\infty}e^{-st}\right)$$

Đặt $s=\sigma+j\omega \Rightarrow \lim\limits_{T\to\infty}e^{-sT}=\lim\limits_{T\to\infty}e^{-\sigma T}\left(\cos\omega T+j\sin\omega T\right)$

Do hàm số $\cos\omega T+j\sin\omega T$ là bị chặn, giới hạn trên hội tụ khi $\sigma>0$

Vậy $L\{c\}=\dfrac{c}{s}$ với $\mathrm{Re}(s)>0$

Ví dụ 2. Tìm biến đổi Laplace của $x(t)=t$

$$L\{t\}=\int_0^\infty te^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T te^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left[\left(-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_0^T\right]$$

$$=\frac{1}{s^2},\ \mathrm{Re}(s)>0$$

Ví dụ 3. Tìm biến đổi Laplace của $x(t)=e^{kt}$ với $k\in R, k$: const

$$L\left\{e^{kt}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(k-s)t}dt=\lim_{T\to\infty}\left[\left(\frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\right)_0^T\right]$$

$$=\frac{1}{k-s},\ \mathrm{Re}(s)>k$$

Ví dụ 4. Tìm biến đổi Laplace của $x(t)=\sin t$

$$L\{\sin t\}=X(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=1-\left(se^{-st}\sin t\Big|_0^\infty\right)-s^2\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$$

$$\Rightarrow\left(1+s^2\right)X(s)=1\Rightarrow X(s)=\frac{1}{1+s^2}$$

4.1.2. Điều kiện tồn tại

Định nghĩa. Hàm $x(t)$ là hàm bậc mũ khi $t\to\infty$ nếu tồn tại một số thực α và số thực dương M, T sao cho:

$\left|x(t)\right| < Me^{\alpha T}$ với mọi $t > T$.

Giá trị α_0 nhỏ nhất trong tập các giá trị α được gọi là biên hội tụ.

Nhận xét. Phần lớn các hàm toán học trong các ứng dụng là hàm bậc mũ.

Định lý về sự tồn tại của biến đổi Laplace.

Nếu một hàm nhân quả $x(t)$ liên tục từng phần trên đoạn $\left[0,\infty\right]$ và là bậc mũ với biên hội tụ α_0 thì biến đổi Laplace của $x(t)$ có miền hội tụ là $\operatorname{Re}(s) > \alpha_0$.

4.1.3. Các tính chất của phép biến đổi Laplace.

a) Tính tuyến tính.

Nếu $x(t), y(t)$ có biến đổi Laplace, α, β là các hằng số thì $\alpha x(t) + \beta y(t)$ cũng có biến đổi Laplace và: $L\left\{\alpha x(t) + \beta y(t)\right\} = \alpha L\left\{x(t)\right\} + \beta L\left\{y(t)\right\}$

Ví dụ. $L\left\{3 + 7\sin t\right\} = L\left\{3\right\} + 7L\left\{\sin t\right\} = \dfrac{3}{s} + \dfrac{7}{1+s^2}$

a) Tính đồng dạng

Nếu $L\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{1}{\omega}.\dfrac{1}{1+\dfrac{s^2}{\omega^2}} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ thì với mọi $a > 0$, $L\left\{x(at)\right\} = \dfrac{1}{a}X\left(\dfrac{s}{a}\right)$

Ví dụ. $L\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{1}{\omega}.\dfrac{1}{1+\dfrac{s^2}{\omega^2}} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

b) Tính dịch chuyển ảnh

Nếu $X(s) = L\left\{x(t)\right\}$ thì với mọi $a \in R$, $L\left\{e^{at}x(t)\right\} = X\left(s-a\right)$

Ví dụ. $L\left\{e^{at}\sin\omega t\right\} = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

c) Đạo hàm của phép biến đổi

Giả sử $X(s) = L\left\{x(t)\right\}$, n là một số nguyên dương thì

$$L\left\{t^n x(t)\right\} = \left(-1\right)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

Ví dụ.

$$L\left\{t^n\right\} = \left(-1\right)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

d) Biến đổi của đạo hàm

Giả sử $X(s) = L\left\{x(t)\right\}$ thì $L\left\{x'(t)\right\} = sX(s) - x(0)$

Tổng quát hơn, nếu $x(t)$ có đạo hàm đến cấp n thì $L\left\{x^{(n)}(t)\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)$

Ví dụ. $L\left\{\cos\omega t\right\} = L\left\{\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)'\right\} = \dfrac{1}{\omega}.s.\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} - \sin 0 = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

4.2. Biến đổi Laplace ngược

4.2.1. Định nghĩa. Cho hàm $X(s)$, nếu tồn tại $x(t)$ sao cho $L\{x(t)\}=X(s)$ thì ta nói $x(t)$ là biến đổi ngược của $X(s)$, ký hiệu $x(t)=L^{-1}\{X(s)\}$.

Ví dụ. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$ trên miền Re(s)>2

Ta có: $\dfrac{1}{(s+3)(s-2)}=\dfrac{-\frac{1}{5}}{s+3}+\dfrac{\frac{1}{5}}{s-2}$

$\Rightarrow L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}=-\dfrac{1}{5}L\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\}+\dfrac{1}{5}L\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}=-\dfrac{1}{5}e^{-3t}+\dfrac{1}{5}e^{2t}$

4.2.2. Tìm biến đổi ngược của hàm phân thức hữu tỷ

Cho hàm số $X(s)$ trên miền số phức có dạng phân thức hữu tỷ $X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của $P(s)$. Phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản loại 1 và loại .

+ Các phân thức hữu tỷ loại 1: $\dfrac{1}{s-a}$ *hay* $\dfrac{1}{(s-a)^n}$, $a\in R$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at};\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

+ Các phân thức hữu tỷ loại 2: $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)}$, $M,N,a,\omega\in R$. Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các thức hữu tỷ loại 2 về một trong hai dạng sau: $\dfrac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}$ hoặc $\dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}$

Ví dụ. $X(s)=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)(s^2+4s+8)}=\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\dfrac{1}{(s+2)^2+4}$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)(s^2+4s+8)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$$

Bài tập.

1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

   a. e^{3t} *b.* $\cos(2t)$

   c. $3t^2-2\sin(3t)$ *d.* te^{-t}

   e. t^2e^{-2t} *f.* $t^2\cos(2t)+t\sin(2t)$

2. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a. $\dfrac{s+3}{s^2+5s+4}$ b. $\dfrac{e^{-s}}{s}$

c. $\dfrac{(s+4)e^{-\pi s}}{s^2+7s+8}$

4.3. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng là các phương trình có dạng $a_n \dfrac{d^n x}{dt} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt} + ... + a_1 \dfrac{dx}{dt} + a_0 = f(t)$, với $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ là các hằng số.

Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng nói trên là tìm hàm số $x(t)$ với hàm số $f(t)$ cho trước và các điều kiện đầu $x(0), x'(0), ..., x^{(n-1)}(0)$ cho trước. Dựa trên các tính chất biến đổi của đạo hàm , các phương trình vi phân tuyến tính được đưa về phương trình đại số. Nghiệm của phương trình vi phân được suy ra từ nghiệm của phương trình đại số thông qua phép biến đổi Laplace ngược.

Ví dụ. Giải phương trình vi phân $x'' + 5x' + 6x = 2e^{-t}, t \ge 0$

với điều kiện đầu: $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình vi phân:

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s^2+6s+7}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = \left.\frac{s^2+6s+7}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = \left.\frac{s^2+6s+7}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} = 1$$

$$A_3 = \left.\frac{s^2+6s+7}{(s+2)(s+1)}\right|_{s=-3} = -1$$

Vậy $\Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}$

$x(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}$.

4.4. Biến đổi Z

4.4.1. Biến đổi Z

Định nghĩa. Cho dãy số $\{x_n\}$, biến đổi Z của dãy $\{x_n\}$ được định nghĩa là:

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

Z là toán tử của phép biến đổi và z^n là nhân của phép biến đổi.

Ví dụ. Tìm biến đổi Z của dãy số sau:

$$x_n = \begin{cases} 2^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{z}\right)^n}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad \text{với } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

Hay $X(z) = \frac{z}{z-2}$ với $|z| > 2$

Ví dụ 2. Tìm biến đổi Z của dãy số $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_0^{\infty}$

Giải. $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(-\frac{1}{2z}\right)^n}{1+\frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z+1}$ với $|z| > \frac{1}{2}$

Miền hội tụ của biến đổi Z.

Tập hợp tất cả các giá trị z mà tại đó chuỗi hàm $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z. Miền hội tụ được ký hiệu là $RoC\{X(z)\}$.

Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ thì chuỗi số hội tụ, ngược lại chuỗi số trên là phân kỳ.

Áp dụng quy tắc hội tụ Cauchy vào công thức biến đổi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n}$$

Để $X(z)$ hội tụ thì đồng thời cả hai chuỗi thành phần đều phải hội tụ.

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$, theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi này hội tụ khi và chỉ khi $|z| > \lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n}$

Xét $\sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n}$, theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi này hội tụ khi và chỉ khi

$|z| < \lim_{n\to\infty} |x_{-n}|^{1/n}$

4.4.2. Bảng các biến đổi Z thông dụng

$\{x_n\}$	$Z\{x(t)\} = X(z)$	Miền hội tụ R_0C
$x_n = \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$	1	mọi z
$x_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert x \rvert > 1$
$x_n = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, a: là hằng số	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$x_n = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$x_n = \begin{cases} na^{n-1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, a: là hằng số	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$x_n = \begin{cases} \cos \omega_0 n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$\lvert z \rvert > 1$
$x_n = \begin{cases} \cos \omega_0 n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$\lvert z \rvert > 1$

4.4.3. Biến đổi Z ngược

Cho hàm phức $X(z)$, nếu tồn tại $\{x_n\}$ sao cho $Z\{x_n\} = X(z)$ thì $\{x_n\}$ được gọi là biến đổi Z ngược của $X(z)$, ký hiệu $\{x_n\} = Z^{-1}[X(z)]$.

Tìm biến đổi ngược của $X(z)$: Khai triển thành tổng các phân thức đơn giản.

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n \qquad n \geq 0$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} a^{n-m}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^{m+1}}\right]=\frac{(n-1)(n-2)...(n-m)}{m!}a^{n-m-1} \qquad n\geq m+1$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của hàm số hàm số:

1) $X(z)=\frac{z}{z-2}$

2) $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$

3) $X(z)=\frac{2z+1}{(z+1)(z+2)}$