ĐOÀN VƯƠNG NGUYÊN

BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HỒ CHÍ MINH
2011

MỤC LỤC

Chương IV. Ánh xạ tuyến tính

Chương V. Dạng toàn phương

Chương I

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1. MA TRẬN

1.1. Khái niệm ma trận

- **Định nghĩa 1**

• *Một ma trận (matrix) A có cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một hệ thống gồm $m \times n$ số thực a_{ij} ($i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$), được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

• *Ma trận A như trên được viết gọn là $A = (a_{ij})_{m\times n}$.*

• *Các số thực a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận $(a_{ij})_{m\times n}$ nằm ở dòng thứ i và cột thứ j.*

• *Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận không.*

• *Cặp số (m, n) được gọi là kích thước của ma trận A. Hai ma trận có cùng kích thước được gọi là cùng cấp.*

• *Tập hợp các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Ví dụ 1. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, ta có $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ và

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 6.$$

- **Định nghĩa 2**

Xét ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

• *Khi $m = n$, ta gọi A là ma trận vuông cấp n. Ký hiệu $(a_{ij})_{n\times n}$, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ được viết gọn là $(a_{ij})_n$ và $M_n(\mathbb{R})$.*

• *Khi $m = 1$, ta gọi $A = (a_{11} \ \cdots \ a_{1n}) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ là ma trận dòng.*

• *Khi $n = 1$, ta gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận cột.*

• *Khi $m = n = 1$, ta gọi $A = (a_{11}) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận 1 phần tử.*

- **Định nghĩa 3**

• *Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ của ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ được gọi là đường chéo chính của A, đường chéo còn lại được gọi là đường chéo phụ.*

• *Ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận chéo (diagonal matrix), ký hiệu là $A = \operatorname{diag}(a_{11} \ \ a_{22} \ \cdots \ a_{nn})$.*

• *Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị cấp n (Identity matrix), ký hiệu là I_n hay I.*

- *Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới (tương ứng, trên) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận tam giác trên (tương ứng, dưới).*
- *Ma trận vuông có tất cả các cặp phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính bằng nhau được gọi là ma trận đối xứng.*

Ví dụ 2.

$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ là các ma trận chéo;

$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ là các ma trận đơn vị;

$C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác trên;

$E=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3&0&0\\4&0&0\\-1&5&2\end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác dưới;

$G=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}3&4&-1\\4&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$ là các ma trận đối xứng.

- **Định nghĩa 4**

Hai ma trận $A=(a_{ij})$ *và* $B=(b_{ij})$ *được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và* $a_{ij}=b_{ij}\ (\forall i,j)$, *ký hiệu là* $A=B$.

Ví dụ 3. Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1&x&y\\z&2&t\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&u&3\end{pmatrix}$.

Ta có $A=B$ khi $x=0,\ y=-1,\ z=2,\ u=2,\ t=3$.

1.2. Các phép toán trên ma trận

1.2.1. Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B=(b_{ij})_{m\times n}$, *ta định nghĩa*

$$\boxed{A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}}$$

Ví dụ 4.

$$\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&3&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&2\\5&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\7&0&-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&2\\2&3&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&2\\5&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\-3&6&-5\end{pmatrix}.$$

- **Nhận xét**

Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp.

1.2.2. Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và số* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, ta định nghĩa*

$$\boxed{\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}}$$

Ví dụ 5.

$$-3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

▪ **Chú ý**

• Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.

• Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A.

Ví dụ 6.

$$5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 0 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ 4 & 16 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 16 & -16 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 7. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $2X + 4I_2 = 2A - B$.

Giải. Ta có:

$$2X + 4I_2 = 2A - B \Leftrightarrow 2X = 2A - B - 4I_2 \Leftrightarrow X = A - \frac{1}{2}B - 2I_2$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy $X = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B = (b_{jk})_{n\times p}$*, ta định nghĩa*

$$\boxed{AB = (c_{ik})_{m\times p}}$$

trong đó $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$ $(i = 1,..., m;\ k = 1,..., p)$.

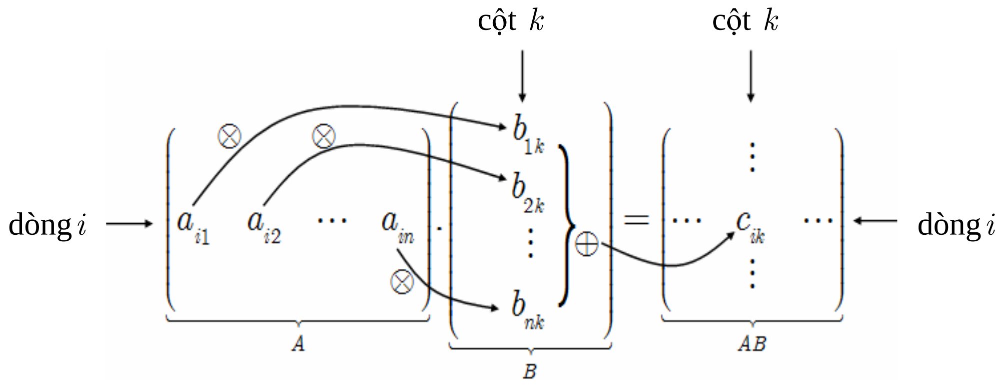
▪ **Chú ý**

Điều kiện để phép nhân AB thực hiện được là số cột của ma trận A (ma trận trước) bằng số dòng của ma trận B (ma trận sau).

▪ **Nhận xét**

• Số dòng của ma trận tích AB bằng số dòng của ma trận A, số cột của ma trận tích AB bằng số cột của ma trận B.

• Sơ đồ nhân hai ma trận A và B:



Ví dụ 8.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = (1.4 + 2.5 + 3.6) = (32),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\6 & 7 & 8\end{pmatrix} = \Big((1.3+2.6) \quad (1.4+2.7) \quad (1.5+2.8)\Big) = (15 \quad 18 \quad 21),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.2+2(-1) & 1.0+2.0\\0.2+0.(-1) & 0.0+0.0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\\-1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4\\-7 & 9\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 9. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Thực hiện các phép tính sau: 1) AI_3; 2) I_2A.

Giải

1) $AI_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; 2) $I_2A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

Ví dụ 10. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính sau: 1) AB; 2) BA.

Giải

1) $AB = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\-2 & 2 & 0\\-9 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

2) $BA = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 4 & -2\\-3 & 6 & -3\\0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

▪ **Nhận xét**

• Tích của hai ma trận khác không có thể là một ma trận không.
• Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

▪ **Tính chất**

Cho các ma trận A, B, C và số $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả thiết rằng các phép tính đều thực hiện được, ta có:

i) $(AB)C = A(BC)$ (tính chất kết hợp);

ii) $A(B+C) = AB + AC$ (tính chất phân phối bên trái);

iii) $(A+B)C = AC + BC$ (tính chất phân phối bên phải);

4i) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

5i) $AI_n = A = I_m A$, với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 11. Thực hiện phép tính sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 12. Thực hiện phép tính $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & 3 \\ 7 & -7 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 8 \\ 23 & 0 & -10 \\ -35 & -21 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

Thực hiện phép nhân từ phải sang trái ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Lũy thừa ma trận vuông

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$.

• *Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp như sau:*

$$\boxed{A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^{k+1} = A^k.A = A.A^k\ \ (\forall k \in \mathbb{N})}$$

• *Nếu A khác ma trận không và $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0;\,1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ma trận lũy linh. Số $k \in \mathbb{N},\ k \ge 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là cấp của ma trận lũy linh A.*

Ví dụ 13. Ma trận $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3 vì:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\neq(0_{ij})_3,\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(0_{ij})_3.$$

- **Tính chất**

i) $[(0_{ij})_n]^k=(0_{ij})_n$, $(I_n)^k=I_n$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

ii) $A^{k+m}=A^k.A^m$, $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k,m\in\mathbb{N}$.

iii) $A^{km}=(A^k)^m$, $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k,m\in\mathbb{N}$.

- **Chú ý**

• Nếu $A=\operatorname{diag}(a_{11}\quad a_{22}\quad\cdots\quad a_{nn})$ thì $A^k=\operatorname{diag}(a_{11}^k\quad a_{22}^k\quad\cdots\quad a_{nn}^k)$.

• Nếu $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB=BA$ (*giao hoán*) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B. Khi $AB\neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

Ví dụ 14. Xét ma trận chéo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ta có:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2&0&0\\0&(-1)^2&0\\0&0&2^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^3&0&0\\0&(-1)^3&0\\0&0&2^3\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 15. Xét hai ma trận $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$, ta có:

• $AB=BA=I_2$,

• $(A+B)^2=\left[\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}$,

• $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}^2$

$$=\begin{pmatrix}14&25\\5&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&-25\\-5&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}.$$

Suy ra $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.