# BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP C1 ĐẠI HỌC
# (Số đvhp: 2 – số tiết: 30)

**Chương 0. Bổ túc kiến thức cơ bản**
**Chương 1. Tích phân suy rộng và chuỗi số**
**Chương 2. Hàm số nhiều biến số**
**Chương 3. Một số bài toán kinh tế**
**Chương 4. Phương trình vi phân cấp 1 và tích phân bội hai cơ bản**

**Biên soạn: Đoàn Vương Nguyên**

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp* A1 – C1 – ĐH Công nghiệp TP. HCM.
2. Nguyễn Đình Trí – *Toán cao cấp* (Tập 2, 3) – NXB Giáo dục.
3. Lê Văn Hốt – *Toán cao cấp C*2 – ĐH Kinh tế TP. HCM.
4. Lê Quang Hoàng Nhân – *Toán cao cấp* – ĐH Kinh tế - Tài chính TP. HCM – NXB Thống kê.
5. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp* (Tập 1, 3, 4) – NXBĐHQG TP.HCM.
6. Nguyễn Viết Đông – *Toán cao cấp* (Tập 1, 2) – NXB Giáo dục.
7. James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, Sixth Edition – Copyright © 2008, 2003 Thomson Brooks
8. Robert Wrede, Murray. R. Spiegel, *Theory and Problems of Advanced Calculus*, Second Edition – Copyright © 2002, 1963 by The McGraw-Hill Companies, Inc

……………………………………………………

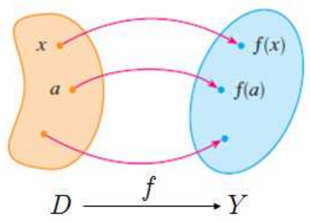
# Chương 0. BỔ TÚC KIẾN THỨC CƠ BẢN

## 0.1. Bổ túc về hàm số

### 0.1.1. Định nghĩa

Xét hai tập con khác rỗng $D$ và $Y$ của $\mathbb{R}$. Hàm số $f$ là một quy tắc (hay *ánh xạ*) cho tương ứng mỗi phần tử $x \in D$ với duy nhất một phần tử $y \in Y$, ký hiệu là $f(x)$

$$f : \mathbb{R} \supset D \to Y \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$




• Tập $D$ được gọi là *miền xác định* (MXĐ) của hàm số $f$, ký hiệu là $D_f$.

• Tập $f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ được gọi là *miền giá trị* của hàm $f$.

• *Đồ thị* của hàm $f$ có MXĐ $D$ là tập hợp điểm $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ trên mặt phẳng $Oxy$.

• Nếu hàm $f$ thỏa mãn $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$ thì $f$ được gọi là *hàm số chẵn*.

• Nếu hàm $f$ thỏa mãn $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$ thì $f$ được gọi là *hàm số lẻ*.

• Hàm $f$ được gọi là *đồng biến* trên $(a;b)$ nếu $f(x_1) < f(x_2)$ khi $x_1 < x_2$ với $x_1, x_2 \in (a;b)$; $f$ được gọi là *nghịch biến* trên $(a;b)$ nếu $f(x_1) > f(x_2)$ khi $x_1 < x_2$ với $x_1, x_2 \in (a;b)$.

### 0.1.2. Hàm số hợp

Giả sử hai hàm số $f$ và $g$ thỏa mãn $G_g \subset D_f$. Khi đó, hàm số $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ được gọi là *hàm số hợp* của $f$ và $g$.

**VD.** Xét $f(x) = 3x^2$ và $g(x) = x - 1$, ta có:

• Hàm số hợp của $f$ và $g$ là $f(g(x)) = 3(g(x))^2 = 3x^2 - 6x + 3$.

• Hàm số hợp của $g$ và $f$ là $g(f(x)) = f(x) - 1 = 3x^2 - 1$.

### 0.1.3. Hàm số ngược

• Hàm số $f$ được gọi là *song ánh* nếu $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

• Xét hàm song ánh $f$ có MXĐ $D$ và miền giá trị $G$. Khi đó, hàm số ngược của $f$, ký hiệu là $f^{-1}$, có MXĐ $G$ và miền giá trị $D$ được định nghĩa

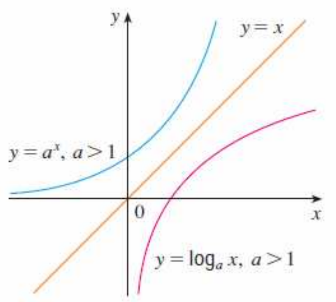
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \ (x \in D, y \in G).$$

**VD.** Nếu $f(x) = 2^x$ thì $f^{-1}(x) = \log_2 x \ (x > 0)$.

▪ **Chú ý**

• MXĐ của $f^{-1}$ = miền giá trị của $f$, và miền giá trị của $f^{-1}$ = MXĐ của $f$.

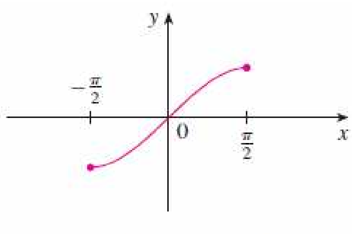
• Đồ thị của hàm $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.



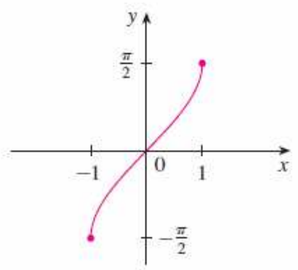

### 0.1.4. Hàm số Lượng giác ngược

#### 0.1.4.1. Hàm số *y* = arcsin *x*

$$\boxed{\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$$




$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$




$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

**VD.** Tính $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ và $\cot\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

**Giải.**

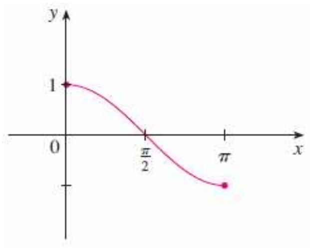
• Ta có $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, vì $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• Đặt $\arcsin\dfrac{1}{4} = \varphi$, ta được $\sin\varphi = \dfrac{1}{4}$ và $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

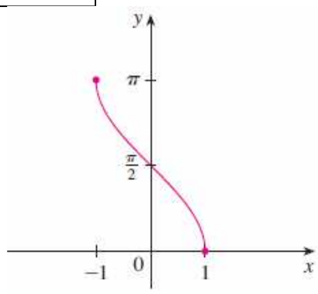
Vậy, ta có $\cos\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, và $\cot\left(\arcsin\dfrac{1}{4}\right) = \cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{15}$.

**0.1.4.2. Hàm số *y* = arccos *x***

$$\boxed{\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ y \in [0;\ \pi]}$$




$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$

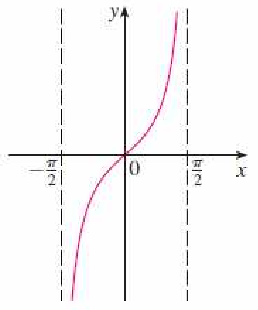



$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

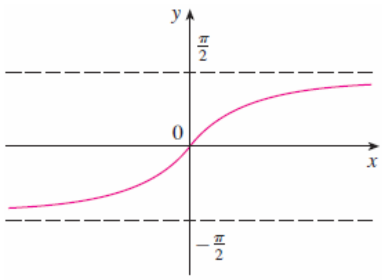
**VD.** $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$; $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

**0.1.4.3. Hàm số *y* = arctan *x***

$$\boxed{\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x,\ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)}$$




$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$




$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

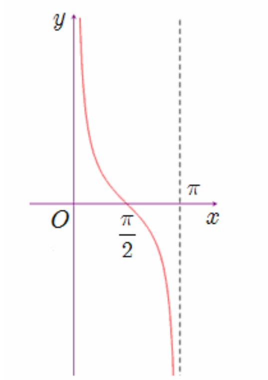
▪ **Quy ước**

$$\boxed{\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2},\ \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}}$$

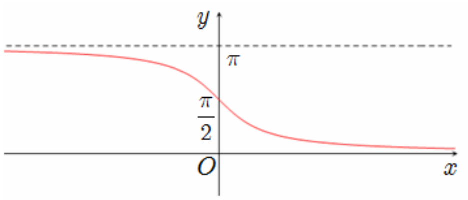
**VD.** $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

**0.1.4.4. Hàm số *y* = arccot *x***

$$\boxed{\text{arccot}\, x = y \Leftrightarrow \cot y = x,\ y \in (0;\ \pi)}$$




$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$




$y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$

- **Quy ước**

$$\boxed{\operatorname{arccot}(+\infty) = 0,\ \operatorname{arccot}(-\infty) = \pi}$$

**VD.** $\operatorname{arccot}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$; $\operatorname{arccot}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

## 0.2. Giới hạn của hàm số

- **Quy tắc tính giới hạn**

Giả sử $k$ là hằng số và $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó

1) $\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)] = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

- **Định lý**

Nếu $f(x) \le g(x)$ khi $x$ tiến đến $a$ $(x \neq a)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

- **Định lý kẹp giữa**

Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x)$ khi $x$ tiến đến $a$ $(x \neq a)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

- **Chú ý**

$$\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty,\ \frac{1}{\pm\infty} = 0}$$

- **Một số kết quả giới hạn cần nhớ**

1) $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\tan\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

4) $\lim\limits_{x\to a}\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

5) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (nếu $n$ lẻ, ta giả sử rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$)

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\beta^x} = 0$ nếu $\alpha \geq 1,\ \beta > 1$.

## 0.3. Hàm số liên tục

▪ **Định nghĩa**

• Hàm số $f$ được gọi là *liên tục tại điểm* $a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

• Hàm số $f$ được gọi là *liên tục bên trái tại điểm* $a$ nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

• Hàm số $f$ được gọi là *liên tục bên phải tại điểm* $a$ nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

• Hàm số $f$ được gọi là *liên tục trên khoảng* $(a;b)$ nếu $f$ liên tục tại mọi điểm thuộc $(a;b)$. (Nếu $f$ liên tục phải tại $a$ và liên tục trái tại $b$ thì $f$ liên tục trên đoạn $[a;b]$).

▪ **Chú ý**

• Mọi đa thức đều liên tục trên $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$.

• Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.

## 0.4. Đạo hàm và vi phân

▪ **Định nghĩa vi phân**

Đại lượng $dy = f'(x)dx$ được gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$.

▪ **Chú ý**

$$\boxed{dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

▪ **Các quy tắc tính đạo hàm**

Giả sử $f$, $g$ và $h$ là các hàm số khả vi, ta có:

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

2) $[Cf(x)]' = C.f'(x)$ $(C \in \mathbb{R})$;

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x) \neq 0)$;

5) Nếu $y = f(u)$ với $u = g(x)$ thì $y'(x) = y'(u).u'(x)$;

6) Nếu $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ thì $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$;

7) Nếu $y = f(x)$ cho bởi $x = \varphi(t)$ và $y = \psi(t)$ thì $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

▪ **Đạo hàm của các hàm số sơ cấp**

| | |
|---|---|
| 1) $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ | $(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$ |
| 2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| 3) $(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin u)' = u'.\cos u$ |
| 4) $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos u)' = -u'.\sin u$ |
| 5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ |
| 6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ | $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ |
| 7) $(e^x)' = e^x$ | $(e^u)' = u'e^u$ |
| 8) $(a^x)' = a^x.\ln a$ | $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ |
| 9) $\left(\ln \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x}$ | $\left(\ln \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u}$ |
| 10) $\left(\log_a \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$ | $\left(\log_a \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$ |
| 11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ |
| 14) $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ | $(\text{arccot}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ |

## 0.5. Quy tắc L'Hospital

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ đồng thời bằng 0 (hoặc bằng vô cùng) thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là dạng vô định $0 / 0$ (hoặc $\infty / \infty$). Các dạng giới hạn này được giải quyết nhờ quy tắc L'Hospital sau

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trên $(a,b)$ (có thể không khả vi tại $x_0$) và $g'(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

▪ **Chú ý**

Các dạng vô định: $0.\infty$, $\infty^0$, $0^0$, $1^\infty$, và $\infty - \infty$ đều có thể biến đổi để áp dụng quy tắc L'Hospital.

## 0.6. Tích phân

- **Công thức đổi biến số**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và hàm số $x = \varphi(t)$ khả vi thì

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C}$$

- **Công thức tích phân từng phần**

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

- **Các dạng tích phân từng phần thường gặp**

• Đối với dạng tích phân $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$ thì ta đặt $u = P(x),\ dv = e^{\alpha x}dx$.

• Đối với dạng tích phân $\int P(x)\ln^{\alpha} x\,dx$ thì ta đặt $u = \ln^{\alpha} x,\ dv = P(x)dx$.

## MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

1) $\int a.dx = ax + C,\ \ a \in \mathbb{R}$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$;

4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

5) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

6) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0$;

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

14) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$;

15) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$;

17) $\int \sqrt{x^2 + a}\ \ dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$;

18) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{|\,a\,|} + C$.

………………………………………………………………………………

# Chương 1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG VÀ CHUỖI SỐ

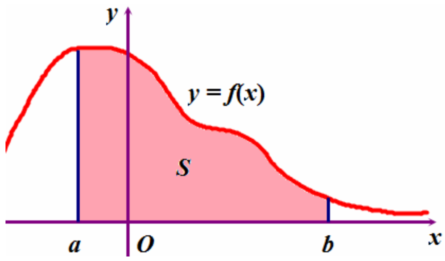
**Bài 1. Tích phân suy rộng**
**Bài 2. Khái niệm cơ bản về chuỗi số**
**Bài 3. Chuỗi số dương**
**Bài 4. Chuỗi số có dấu tùy ý**

# Bài 1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

- **Khái niệm mở đầu**

• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\, b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

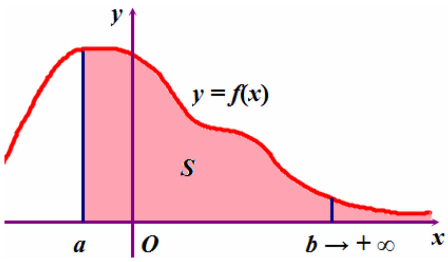
$$S = \int_a^b f(x)dx\,.$$




• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;+\infty)$ ($b \to +\infty$).

Khi đó, diện tích *S* có thể tính được cũng có thể không tính được. Trong trường hợp tính được hữu hạn thì

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx\,.$$




## 1.1. Tích phân suy rộng loại 1

### 1.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a;b]$. Giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại* 1 của $f(x)$ trên $[a;+\infty)$, ký hiệu là

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

Định nghĩa tương tự:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx \end{aligned}}$$

- **Chú ý**

• Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn, ta nói *tích phân hội tụ*; ngược lại là *tích phân phân kỳ*.

• Nghiên cứu về tích phân suy rộng là *khảo sát sự hội tụ* và *tính giá trị hội tụ* (nếu được).

**VD 1.** Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

• *Trường hợp* $\alpha = 1$: $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left( \ln x \Big|_1^b \right) = +\infty$ (phân kỳ).

• *Trường hợp* $\alpha$ *khác* 1: $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b \to +\infty} \left( x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b \to +\infty} \left( b^{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1. \end{cases}$

Vậy

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 1 : \textit{tích phân hội tụ và } I = \frac{1}{\alpha - 1} \\ \alpha \le 1 : \textit{tích phân phân kỳ và } I = +\infty \end{array}}$$

**VD 2.** Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$.

...........................................................................................................

...........................................................................................................

- **Chú ý**

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$.

• Tương tự: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$.

**VD 3.** Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

...........................................................................................................

...........................................................................................................

### 1.1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

#### 1.1.2.1. Tiêu chuẩn 1

$$\boxed{\begin{cases} 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a; +\infty) \\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \textit{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \textit{ hội tụ}}$$

Các trường hợp khác tương tự.

**VD 4.** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^{10}} dx$.

...........................................................................................................

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

**1.1.2.2. Tiêu chuẩn 2**

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx \text{ hội tụ} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}}$$

Các trường hợp khác tương tự.

**VD 5.** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} e^{-x} \cos 3x\, dx$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

**1.1.2.3. Tiêu chuẩn 3**

Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục, dương trên $[a;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

• Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ* hoặc *phân kỳ*.

• Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ* thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*.

• Nếu $\begin{cases} k = +\infty \\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ phân kỳ} \end{cases}$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ*.

• Các trường hợp khác tương tự.

**VD 6.** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^2 + 2x^3}$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

- **Chú ý**

Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *có cùng tính chất*.

**VD 7.** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + \sin x + x}$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………