HÀM PHỨC
VÀ
PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE ĐẠI HỌC

PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH
Số tiết: 30

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Kim Đính – ***Hàm phức và ứng dụng*** (ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 1998)
2. Nguyễn Kim Đính – ***Phép biến đổi Laplace*** (NXB Khoa học và Kỹ thuật – 1998)
3. Võ Đăng Thảo – ***Hàm phức và Toán tử Laplace*** (ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 2000)
4. Phan Bá Ngọc – ***Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace*** (NXB Giáo dục – 1996)
5. Trương Văn Thương – ***Hàm số biến số phức*** (NXB Giáo dục – 2007)
6. Đậu Thế Cấp – ***Hàm biến phức và phép tính Toán tử*** (NXB ĐH Quốc gia – 2006)
7. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải – ***Hàm biến phức*** (NXB Đại học Quốc gia Hà Nội – 2006)
8. Theodore. W. Gamelin – ***Complex Analysis*** (Department of Mathematics UCLA)
9. Trương Thuận – ***Tài liệu Hàm phức và phép biến đổi Laplace*** (ĐH Công nghiệp TP.HCM)

Biên soạn: *ThS. Đoàn Vương Nguyên*

➤ Chương 1. Số phức

§1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1.1. Các định nghĩa

- Số phức là số có dạng $z = x + iy$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

Số i thỏa $i^2 = -1$ được gọi là ***đơn vị ảo***.

x được gọi là ***phần thực*** của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$.

y được gọi là ***phần ảo*** của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.

Đặc biệt

$z = x + i0$ là số thực, $z = iy\ (y \neq 0)$ là số thuần ảo.

➤ Chương 1. Số phức

VD 1. $\operatorname{Re}(2-3i) = 2$; $\operatorname{Im}(2-3i) = -3$.

$-3 = -3 + i0$; $i\sqrt{2} = 0 + i\sqrt{2}$.

- Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ được gọi là bằng nhau nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

VD 2. $2x + i\sqrt{3} = -4 - iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

- Số phức $\overline{z} = x - iy$ được gọi là ***số phức liên hợp*** của số phức $z = x + iy$, nghĩa là $\overline{x + iy} = x - iy$.

VD 3. $\overline{-2-3i} = -2 + 3i$; $\overline{i\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}$; $\overline{-1} = -1$.

➤ Chương 1. Số phức

- Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chú ý

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$.
- Khi $x = \infty$ hoặc $y = \infty$, ta ký hiệu $z = x + iy = \infty$.

Tập $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là tập số phức mở rộng.

1.2. Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, ta định nghĩa các phép toán như sau:

➢ Chương 1. Số phức

a) Phép cộng và trừ số phức

$$\boxed{\begin{aligned}(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)&=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\\(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)&=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).\end{aligned}}$$

Chú ý. Phép cộng số phức có tính giao hoán và kết hợp.

VD 4. $(2+i)+(-1-i)=1$; $-3i-(-1+5i)=1-8i$.

b) Phép nhân số phức

$$\boxed{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).}$$

➢ Chương 1. Số phức

Chú ý

- Do $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2$
$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$,
nên ta nhân như hai đa thức và chú ý $i^2=-1$.
- Phép nhân số phức có các tính chất như nhân số thực.

VD 5. $-i\sqrt{2}(-1+i)=i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$;

$$(1-i)(-2+3i)=-2+3i+2i-3i^2=1+5i;$$

$$(1-2i)(1+2i)=1-4i^2=5.$$

➢ Chương 1. Số phức

c) Phép chia số phức

Giả sử $z_2\neq 0$, khi đó ta có:

$$\boxed{z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}.}$$

VD 6. $\dfrac{1-i}{2+i}=\dfrac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{1-3i}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$;

$$\frac{3+2i}{i}=\frac{(3+2i)(-i)}{i(-i)}=\frac{2-3i}{1}=2-3i.$$

➢ Chương 1. Số phức

d) Lũy thừa bậc *n* của số phức

$$\boxed{z^n=z.z...z\ (n\ \text{số}\ z).}$$

VD 7. $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=(i^2)^2=1$;
$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=-2-2i$.

e) Căn bậc *n* của số phức

$$\boxed{w=\sqrt[n]{z}\Leftrightarrow z=w^n.}$$

VD 8. Tính $\sqrt{3+4i}$.

VD 9. Tính $\sqrt[3]{1}$.

➢ Chương 1. Số phức

1.3. Định lý

Cho $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, ta có:

1) $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$; $\overline{z_1.z_2}=\overline{z}_1.\overline{z}_2$.

2) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z=2x$; $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z=2iy$.

3) $z.\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\geq 0$.

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ $(z_2\neq 0)$.

VD 10. Cho $P_n(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$ là đa thức bậc n theo z với hệ số $a_i\in\mathbb{R}$ $(i=0,1,...,n)$.
Giả sử $P_n(2+3i)=1-i$, tính $P_n(2-3i)$.

➢ Chương 1. Số phức

§2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC CÔNG THỨC MOIVRE, CÔNG THỨC EULER

2.1. Dạng lượng giác của số phức

a) Mặt phẳng phức

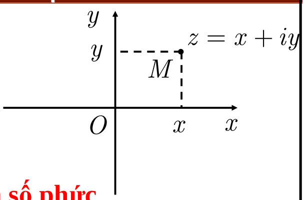
- Về mặt hình học, số phức $z=x+iy$ được biểu diễn bằng điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Khi đó, mặt phẳng Oxy được gọi là ***mặt phẳng phức***.

- Trong mặt phẳng phức, ta có:
$\operatorname{Im}z=0\Leftrightarrow z\in Ox$; $\operatorname{Re}z=0\Leftrightarrow z\in Oy$.

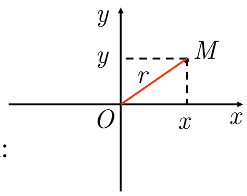
Do đó:

- Trục hoành Ox được gọi là ***trục thực***.
- Trục tung Oy được gọi là ***trục ảo***.



b) Modul và argument của số phức

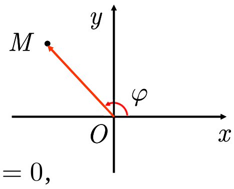
- Trong mặt phẳng phức, khoảng cách r từ gốc tọa độ O đến điểm M được gọi là modul của z, ký hiệu là $|z|$.



Modul của z được xác định bởi:

$$\boxed{|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

- Góc định hướng $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ có tia đầu Ox và tia cuối OM, được gọi là argument của z.
- Argument φ của z thỏa mãn
  $-\pi < \varphi \le \pi$
  được gọi là ***argument chính***, ký hiệu là $\arg z$.



- Nếu z là số thực dương thì $\arg z = 0$,
  z là số thực âm thì $\arg z = \pi$.
  $z = 0$ thì argument của z không xác định.
- Ký hiệu tập hợp tất cả argument của z là Arg$z$.
  Vậy $\boxed{\text{Arg}z = \arg z + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

Quy ước

Khi không nói rõ φ thuộc khoảng nào thì ta hiểu φ là argument chính.

- **Cách xác định argument chính của z = x + iy**

➢ **Bước 1.** Xác định điểm M biểu diễn z trên mpOxy.

➢ **Bước 2.** $\arg z = \varphi$ thỏa mãn $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $-\pi < \varphi \le \pi$ và phụ thuộc vào vị trí của M.

VD 1. Xác định modul và argument của các số phức:

a) $z = i$; b) $z = -\sqrt{3} - i$.

c) Dạng lượng giác của số phức

- Cho số phức $z = x + iy$ có $|z| = r$ và $\arg z = \varphi$.

Ta có: $z = r\left(\dfrac{x}{r} + i\dfrac{y}{r}\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Vậy dạng lượng giác của số phức z là:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

VD 2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $z = -4$; b) $z = 1 - i\sqrt{3}$; c) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Nhận xét

- Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì:
  $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$.
- Nếu $z \in \mathbb{R}$, $z = x + i0$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$.

2.2. Công thức Moivre

- Cho số phức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Khi đó: $\boxed{z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\ (n \in \mathbb{Z},\ n \ge 1).}$

- Tổng quát, cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Khi đó:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}. \\ 2)\ \sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + k2\pi}{n}\right) \\ \qquad \left(n \in \mathbb{Z},\ n \ge 2,\ k = \overline{0,\ n-1}\right). \end{array}}$$

VD 3. Tính a) $(1 - i)^{100}$; b) $\sqrt[3]{8}$.

2.3. Công thức Euler

Ta có: $i^n = i^{4k+r} = (i^k)^4.i^r = i^r$ $(0 \le r \le 3)$. Do đó:

- $i^n = 1$ nếu $r = 0$, nghĩa là $n \vdots 4$;
- $i^n = i$ nếu $r = 1$, nghĩa là $n : 4$ dư 1;
- $i^n = -1$ nếu $r = 2$, nghĩa là $n : 4$ dư 2;
- $i^n = -i$ nếu $r = 3$, nghĩa là $n : 4$ dư 3.

Khai triển Maclaurin hàm $e^{i\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$, ta được:

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots\right)$$
$$= \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

➢ **Công thức Euler**

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.}$$

- Dựa vào công thức Euler, số phức z có $|z| = r$ và $\arg z = \varphi$ có thể được viết dưới dạng mũ:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}.}$$

VD 4. Viết các số phức sau dưới dạng mũ:

a) $z = -3$; b) $z = -i$; c) $z = -\sqrt{3} + i$.

Nhận xét

1) Nếu $z = re^{i\varphi}$ thì $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.

2) Với mọi $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, ta gọi

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

là khoảng cách giữa z_1 và z_2.

Khi đó $|z - a| = r$ hay $z = a + re^{i\varphi}$ $(\varphi \in [0;\ 2\pi])$ là phương trình đường tròn tâm a, bán kính r.

Đặc biệt, $|z| = 1$ hay $z = e^{i\varphi}$ là phương trình của đường tròn đơn vị.

- **Công thức cần nhớ**

Với $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,

$z_2 = r_2e^{i\varphi_2} = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, ta có:

1) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$

3) $z^n = r^ne^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4) $\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}.e^{i\frac{\varphi+k2\pi}{n}}$ $\left(n \geq 2,\ k = \overline{0,\ n-1}\right)$.

……………………………………………………………

§3. ĐƯỜNG VÀ MIỀN TRONG MẶT PHẲNG PHỨC

3.1. Đường trong mặt phẳng phức

a) Phương trình tham số

- Giả sử $x(t)$, $y(t)$ là các hàm thực, xác định và liên tục trên $[a;\ b]$ của đường thẳng thực. Khi đó phương trình:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ \text{a} \leq t \leq \text{b}$$

biểu diễn tham số một đường cong L trong mp phức.

- Các điểm $z(a)$, $z(b) \in L$ lần lượt được gọi là điểm đầu và điểm cuối của đường cong L.

VD 1. a)Đường tròn tâm O bán kính r có phương trình:

$z = r(\cos t + i\sin t) = r\cos t + i.r\sin t$, $t \in [0;\ 2\pi]$.

b) Đoạn thẳng nối điểm O và điểm $(1 + i)$ có phương trình là $z = t + it$, $t \in [0;\ 1]$.

VD 2. Xác định đường cong có phương trình:

$$z = t + \frac{i}{t}\ \ (0 < t < +\infty).$$

Giải. Từ $z = t + \dfrac{i}{t}$, ta suy ra $x = t > 0$ và $y = \dfrac{1}{t}$.

Khử t, ta được $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Vậy đường cong đã cho là nhánh hyperbol $y = \dfrac{1}{x}$ nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng phức.

b) Phân loại đường cong

- Đường cong có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là ***đường cong đóng*** (khép kín).
- Đường cong ***không có điểm tự cắt*** được gọi là đường cong ***Jordan***. Đường cong Jordan đóng còn được gọi là ***chu tuyến***.
- Đường cong L được gọi là trơn nếu các hàm số $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm liên tục và khác 0 trên đoạn $[a;\ b]$, có nghĩa là mọi điểm của L đều có tiếp tuyến.
- Đường cong tạo bởi một số hữu hạn các đường cong trơn được gọi là đường cong ***trơn từng khúc***.

➢ Chương 1. Số phức

3.2. Miền trong mặt phẳng phức

a) Lân cận và miền

- Lân cận $\varepsilon > 0$ của $z_0 (\neq \infty)$ là hình tròn mở tâm tại z_0:

$$U_\varepsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_0| < \varepsilon \right\}.$$

Lân cận ε của điểm $z = \infty$ là $|z| > \varepsilon$.

- Tập $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là một miền trong mặt phẳng phức nếu thỏa hai điều kiện sau:
  1) Với mọi $z_0 \in D$, tồn tại lân cận $U_\varepsilon(z_0) \subset D$.
  2) Với mọi $a, b \in D$, tồn tại đường cong $L \subset D$ có điểm đầu là a, điểm cuối là b.

➢ Chương 1. Số phức

VD 3. a) Tập $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - i| < 1 \right\}$ là 1 miền.

b) Tập $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0 \right\}$ không là miền vì với $a, b \in D$, ta có thể chỉ ra được đường cong L có điểm đầu là a, điểm cuối là b, nhưng L không nằm trong D.

b) Biên và chiều của biên

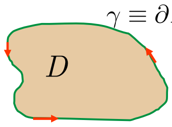
- Điểm z_0 được gọi là điểm biên của miền D nếu trong lân cận bất kỳ của z_0 đều có chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D.
- Tập hợp các điểm biên của miền D được gọi là biên của D, ký hiệu là ∂D.

➢ Chương 1. Số phức

- Nếu D là một miền thì $\overline{D} = D \cup \partial D$ được gọi là miền đóng (hay miền kín).
- Quy ước chiều dương của biên ∂D là chiều mà khi ta đi dọc theo biên sẽ thấy miền D nằm về phía tay trái.

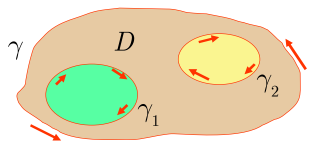
c) Miền đơn liên, miền đa liên

$\gamma \equiv \partial D$



- Xét miền D giới hạn bởi chu tuyến γ. Miền này được gọi là miền đơn liên, γ chính là ∂D.
- Nếu D được giới hạn bởi hai chu tuyến γ_1, γ_2 không giao nhau, thì miền D được gọi là miền nhị liên. Khi đó, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Tương tự, ta có thể định nghĩa miền tam liên, tứ liên,...

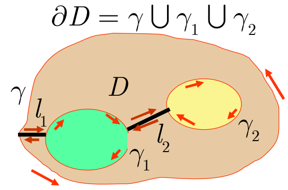
➢ Chương 1. Số phức



Nhận xét

- Nếu ta bổ sung vào miền đa liên các đoạn thẳng $l_1, l_2, \ldots$ thì miền sẽ thành miền đơn liên. Mỗi đoạn thẳng được tính hai lần theo chiều ngược nhau.

$\partial D = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$



……………………………………………………

➢ Chương 2. Hàm biến phức

……………………………

§1. HÀM BIẾN PHỨC
(*Complex variable function*)

1.1. Hàm biến phức

a) Định nghĩa

- Quy tắc f cho tương ứng mỗi $z \in A \subset \mathbb{C}$ với một hay nhiều giá trị $w = f(z) \in \mathbb{C}$ được gọi là một hàm biến phức z.
- Tập A được gọi là miền xác định (MXĐ) của f.

Tập $B = \left\{ w \,\middle|\, w = f(z),\ z \in A \right\}$ tập giá trị của f.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

- Nếu mỗi $z \in A$ ứng với một giá trị $w = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là ***hàm đơn trị***, nếu mỗi $z \in A$ ứng với nhiều giá trị $w = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là ***hàm đa trị***.

VD 1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ là hàm đơn trị có MXĐ $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trong $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = f(z) = \sqrt{z}$ là hàm hai trị.

VD 2. Cho $f(z) = z - 3\operatorname{Im} z$. Tính:

$$f(1),\ f(-2i),\ f(1 - 2i).$$

VD 3. Cho $f(z) = 3z + \overline{z}^2$. Tính $f(-1 + 3i)$.

b) Phần thực và phần ảo của hàm biến phức

• Với mỗi $z \in A$, $w = f(z) \in \mathbb{C}$ nên ta có thể viết:

$$\boxed{w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).}$$

Các hàm $u(x, y) = \operatorname{Re} w$ và $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ lần lượt được gọi là phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$.

VD 4. Xác định phần thực và ảo của $w = z^2 + (1 - i)\overline{z}$.

VD 5. Xác định phần thực và ảo của $f(z) = z - \dfrac{1}{\overline{z}}$.

c*) Phép biến hình thực hiện bởi hàm biến phức

Để biễu diễn hình học một hàm số thực biến số thực, ta vẽ đồ thị của hàm số đó. Để biễu diễn hình học một hàm số phức, ta không thể dùng phương pháp đồ thị được nữa. Ta thực hiện như sau:

• Cho hàm biến phức $w = f(z)$, $z \in A$. Xét hai mặt phẳng phức Oxy (mp$z$) và $O'uv$ (mp$w$). Ứng với mỗi điểm $z_0 \in A$, hàm $w = f(z)$ xác định điểm $w_0 = f(z_0)$ trong mặt phẳng w.

Về mặt hình học, ta nói hàm $w = f(z)$ xác định một phép biến hình từ mp$z$ vào mp$w$.

Điểm w_0 được gọi là ảnh của điểm z_0 và điểm z_0 được gọi là nghịch ảnh của điểm w_0.

• Đường cong $L : z(t) = x(t) + iy(t)$ có ảnh qua phép biến hình $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ là tập hợp điểm trong mp$w$ với tọa độ:

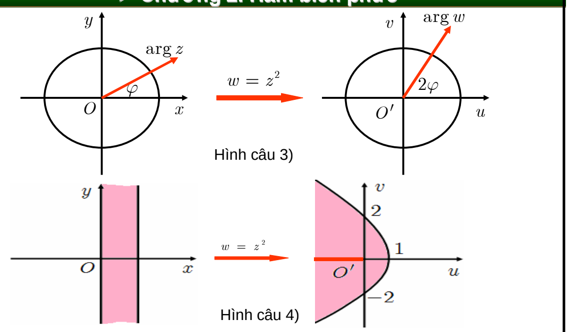
$$u = u(x(t),\, y(t));\; v = v(x(t),\, y(t)).$$

VD 6. Cho hàm $f(z) = z^2$. Tìm ảnh của:

1) Điểm $z_0 = 3 + 2i$; 2) Đường tròn $|\, z\,| = 2$;

3) Tia $\arg z = \varphi,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$;

4) Miền $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 < \operatorname{Re} z < 1 \right\}$.



Hình câu 3)

Hình câu 4)

VD 7. Tìm nghịch ảnh của đường tròn:

$(u - 1)^2 + (v + 1)^2 = 2$ qua phép biến hình $w = \dfrac{1}{z}$.

Từ đây về sau, ta chỉ xét trường hợp hàm *f(z)* đơn trị.

1.2. Tính liên tục của hàm biến phức

a) Giới hạn hàm biến phức

➢ Định nghĩa

• Cho hàm biến phức $f(z)$ xác định trong lân cận của z_0 (có thể trừ điểm z_0). Số phức $a \neq \infty$ được gọi là giới hạn của $f(z)$ khi $z \to z_0$, ký hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$, nếu:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |\, z - z_0\,| < \delta \Rightarrow \left| f(z) - a \right| < \varepsilon.$$

• Hàm phức $f(z)$ được gọi là có giới hạn ∞ khi $z \to z_0$, ký hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, nếu:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |\, z - z_0\,| < \delta \Rightarrow \left| f(z) \right| > M.$$

• Các giới hạn $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = a,\ \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ được định nghĩa tương tự.

➢ Định lý

Nếu hàm phức $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ và $a = \alpha + i\beta$ thì:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha,\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

b) Hàm số liên tục

Định nghĩa

• Cho hàm $f(z)$ xác định trong miền chứa z_0. Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục tại điểm z_0 nếu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

- Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục trong miền B nếu $f(z)$ liên tục tại mọi điểm $z \in B$.

Nhận xét

- Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ thì $u(x,y)$ và $v(x,y)$ liên tục tại (x_0, y_0).
- Các tính chất và phép tính giới hạn tương tự như hàm thực hai biến.

VD 8. a) $\lim\limits_{z \to 1+i} (z^2 + i) = (1+i)^2 + i = 3i$.

b) Hàm phức $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

§2. HÀM GIẢI TÍCH

2.1. Đạo hàm của hàm biến phức

a) Định nghĩa

Cho hàm $w = f(z)$ xác định trong miền D chứa điểm $z = x + iy$. Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Gọi $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ là số gia tương ứng của $f(z)$.

Nếu tỉ số $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta z \to 0$ (theo mọi cách) thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $w = f(z)$ tại điểm z. Ký hiệu $f'(z)$.

Ta có: $\boxed{f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

Chú ý

- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì khả vi tại điểm z.
- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì liên tục tại điểm z.
- Đạo hàm của hàm biến phức có các tính chất và quy tắc tính tương tự hàm biến số thực.

VD 1. Xét hàm $f(z) = z^2$, ta có:

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = 2z.\Delta z + (\Delta z)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z \Rightarrow f'(z) = 2z.$$

➢ Chương 2. Hàm biến phức

VD 2. Xét hàm $f(z) = \overline{z}$, ta có:

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = \overline{z + \Delta z} - \overline{z}$$
$$= \overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i\Delta y} = \Delta x - i\Delta y.$$

- Nếu $\Delta z \to 0$ theo trục thực thì $\Delta y = 0,\ \Delta z = \Delta x$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

- Nếu $\Delta z \to 0$ theo trục ảo thì $\Delta x = 0,\ \Delta z = i\Delta y$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Vậy hàm $f(z) = \overline{z}$ không khả vi tại mọi điểm $z \in \mathbb{C}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

b) Điều kiện khả vi Cauchy – Riemann (C – R)

Định lý

- Nếu hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì các hàm hai biến thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x,y) và thỏa điều kiện C – R:

$$\boxed{u'_x = v'_y \text{ và } u'_y = -v'_x}.$$

- Ngược lại, nếu các hàm hai biến thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại (x,y) và thỏa điều kiện C – R thì hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ và:

$$\boxed{f'(z) = u'_x + iv'_x}.$$

➢ Chương 2. Hàm biến phức

Nhận xét

Do $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ nên ta có:

$$f'_{\overline{z}} = f'_x.x'_{\overline{z}} + f'_y.y'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}f'_x - \frac{1}{2i}f'_y$$
$$= \frac{1}{2}[(u'_x + iv'_x) + i(u'_y + iv'_y)]$$
$$= \frac{1}{2}[(u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x)].$$

Vậy điều kiện C – R tương đương với:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f'_{\overline{z}} = 0}.$$

➢ Chương 2. Hàm biến phức

VD 3. Xét hàm $w = z^2$, ta có: $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$.

Do $\begin{cases} u'_x = 2x = v'_y \\ u'_y = -2y = -v'_x \end{cases}$ nên $w = z^2$ khả vi trên $\mathbb{C}$.

VD 4. Xét hàm $f(z) = z.\text{Re}\, z$, ta có:

$$f(z) = x^2 + ixy \Rightarrow u = x^2,\ v = xy.$$

Điều kiện C – R: $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $f(z) = z.\text{Re}\, z$ khả vi tại $z = 0$ và

$$f'(0) = u'_x(0,0) + iv'_x(0,0) = 0.$$

VD 5. Xét tính khả vi của hàm $w = 3\,\text{Re}\, z - \overline{z}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

c) Hàm giải tích

Định nghĩa

- Hàm $w = f(z)$ khả vi trong một ***lân cận*** của z được gọi là ***giải tích*** (còn gọi là chỉnh hình) tại z.

  Điểm z mà tại đó hàm $w = f(z)$ không giải tích được gọi là ***điểm bất thường*** của $f(z)$.
- Hàm $w = f(z)$ khả vi tại mọi điểm z thuộc miền D thì được gọi là giải tích trong miền D.

Chú ý

- Hàm $w = f(z)$ giải tích tại điểm z_0 thì khả vi tại z_0, ngược lại nói chung là không đúng.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

Chẳng hạn, hàm $f(z) = z.\overline{z}$ khả vi tại $z = 0$ nhưng không giải tích tại điểm đó.

- Hàm $w = f(z)$ giải tích trên miền mở D khi và chỉ khi $f(z)$ khả vi trên D.

VD 6. a) Hàm $w = \overline{z}$ không giải tích tại $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Hàm $w = z^n$ khả vi tại $\forall z \in \mathbb{C}$ nên giải tích trong $\mathbb{C}$.

c) Hàm $w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ giải tích tại $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Hai điểm $z = \pm i$ là điểm bất thường của hàm w.

………………………………………………………

➢ Chương 2. Hàm biến phức

§3. QUAN HỆ GIỮA HÀM GIẢI TÍCH VÀ HÀM ĐIỀU HÒA

3.1. Hàm điều hòa

- **Định nghĩa**

Hàm hai biến thực $u(x,y)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền D nếu $u(x,y)$ thỏa phương trình Laplace:

$$\boxed{\Delta u \equiv u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0.}$$

VD 1. a) Hàm $u = x^2 - y^2$ là hàm điều hòa vì:

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 2 - 2 = 0.$$

b) Hàm $u = \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trong toàn mặt phẳng trừ gốc tọa độ.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

- **Định lý**

Nếu hàm $f(z) = u(x,y) + iy(x,y)$ là hàm giải tích trong miền D thì $u(x,y)$ và $y(x,y)$ là các hàm điều hòa trong miền D.

VD 2. Hàm $w = e^x(\cos y + i \sin y)$ giải tích trong $\mathbb{C}$.

Ta có: $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$

$$\Rightarrow u''_{x^2} = e^x \cos y,\ u''_{y^2} = -e^x \cos y;$$

$$v''_{x^2} = e^x \sin y,\ v''_{y^2} = -e^x \sin y$$

$$\Rightarrow u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0;\ v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0.$$

Vậy $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$ là các hàm điều hòa.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

3.2. Điều kiện để hàm biến phức giải tích

- Nếu $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là hai hàm điều hòa liên hợp (nghĩa là thỏa điều kiện Cauchy – Riemann) trong D thì hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong D.

Nhận xét

- Cho trước một hàm điều hòa, ta có thể tìm được hàm điều hòa liên hợp với nó (sai khác 1 hằng số). Vì vậy, khi cho trước phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích, ta có thể tìm được hàm giải tích đó (sai khác 1 hằng số).

VD 3. Tìm hàm giải tích $f(z)$.

Cho biết phần thực $u = x^2 - y^2 + 2x$ và $f(0) = 0$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

§4. CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

4.1. Hàm hữu tỉ

$$\boxed{f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}.}$$

Các trường hợp riêng của hàm hữu tỉ

- Hàm tuyến tính: $f(z) = az + b$, $D = \mathbb{C}$.
- Hàm lũy thừa: $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $D = \mathbb{C}$.
- Hàm đa thức: $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $D = \mathbb{C}$.
- Hàm phân tuyến tính: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $D = \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

4.2. Hàm mũ và Logarit

a) Hàm mũ

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).}$$

Tính chất

- Nếu $z = x$ thì $e^z = e^x$.
- $|e^z| = |e^x| > 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
- $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
- Hàm $w = e^z$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi i$.
- Hàm $w = e^z$ khả vi với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $(e^z)' = e^z$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

b) Hàm logarit $w = Lnz$

Định nghĩa

Với $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r.e^{i\varphi}$, ta có:

$$lnz = \ln r + i(\varphi + k2\pi),\ (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Chọn $k = 0$ và ký hiệu Lnz, ta được:

$$\boxed{Lnz = \ln r + i\varphi,\ (0 \le \varphi \le 2\pi).}$$

Tính chất

- Hàm Lnz là hàm đơn trị xác định trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $Ln(z_1.z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$.
- Hàm $w = Lnz$ khả vi $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $(Lnz)' = \dfrac{1}{z}$.

➢ Chương 2. Hàm biến phức

4.3. Các hàm lượng giác và hyperbol

- Hàm cosin: $\cos z = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.
- Hàm sin: $\sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.
- Hàm cosin hyperbolic: $chz = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$.
- Hàm sin hyperbolic: $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\sin(iz)$.

• Tất cả các tính chất và công thức lượng giác đã biết cũng đúng với các hàm lượng giác phức.
Các hàm hyperbol xác định và liên tục trên $\mathbb{C}$.

....

➢ Chương 3. Tích phân hàm phức

§1. Tích phân đường của hàm phức.
§2. Định lý Cauchy.
§3. Tích phân bất định. Công thức Newton – Leibnitz.
§4. Công thức tích phân Cauchy.

....

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM PHỨC

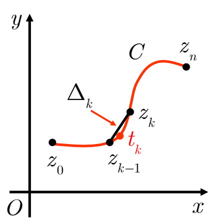
1.1. Định nghĩa

• Cho đường cong định hướng Jordan C, trơn từng khúc, có phương trình:

$z(t) = x(t) + iy(t)$, $t : a \to b$

và hàm phức $f(z)$ xác định liên tục trên C. Chia C thành n điểm chia liên tiếp:

$z(a) = z_0,\ z_1, \ldots,\ z_n = z(b)$.



➢ Chương 3. Tích phân hàm phức

Trên mỗi cung $z_{k-1}z_k$ ta chọn tùy ý điểm t_k $(k = \overline{1,n})$ và lập tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1})$.

• Nếu khi $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \to 0$, tổng S_n dần đến giới hạn là $I \in \mathbb{C}$ (không phụ thuộc vào cách chia và chọn điểm t_k), thì I được gọi là tích phân của $f(z)$ dọc theo C hướng từ z_0 đến z_n. Ký hiệu $\int_C f(z)dz$.

Vậy $\displaystyle\int_C f(z)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k| \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1})$.

• Nếu đường cong có điểm đầu và cuối lần lượt là A, B thì ta ký hiệu $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$.

• Nếu đường cong C có điểm đầu và cuối trùng nhau thì ta ký hiệu $\oint\limits_{C} f(z)dz$ với chiều của C là chiều dương.

1.2. Tính chất

Tích phân đường hàm phức dọc theo C có các tính chất như tích phân đường loại 2:

- $\int\limits_C [af(z) + bg(z)]dz = a\int\limits_C f(z)dz + b\int\limits_C g(z)dz$.

- Nếu $C = C_1 \cup C_2$ và $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ thì:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz.$$

- $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$.

- Gọi L là độ dài của đường C và $M = \max\limits_{z\in C}|f(z)|$, ta có công thức ước lượng tích phân:

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le \int\limits_C |f(z)||dz| \le ML.$$

1.3. Phương pháp tính

a) Đưa về tích phân xác định

Nếu phương trình của $C : z(t) = x(t) + iy(t),\ t : a \to b$

thì: $\boxed{\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_a^b f(z(t)).z'(t)dt.}$

VD 1. Tính tích phân $I = \int\limits_C (\overline{z})^2 dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ gốc tọa độ O đến điểm $1 + i$.

VD 2. Tính tích phân $I = \int\limits_C (\overline{z})^2 dz$, trong đó C là nửa dưới của đường tròn đơn vị nối từ $z = -1$ đến $z = 1$.

b) Biểu diễn tích phân theo phần thực và ảo của *f(z)*

Thay $f(\xi_k) = u(\xi_k) + iv(\xi_k)$ và $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ vào tổng S_n, ta được:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k) + iv(\xi_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k)\Delta x_k + u(\xi_k)\Delta y_k].$$

Qua giới hạn, ta có:

$$\boxed{\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C vdx + udy.}$$

VD 3. Tính tích phân $I = \int\limits_C \overline{z}\, dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2 + i$ đến điểm $z = 0$.

VD 4. Tính tích phân $I = \int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz$, trong đó C là cung parapol $y = x^2$ nối $z = 0$ với $z = 1 + i$.

VD 5. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{dz}{z - a}$, trong đó C là đường tròn tâm a, bán kính r.

§2. ĐỊNH LÝ CAUCHY

2.1. Định lý Cauchy cho miền đơn liên

a) Định lý

Nếu hàm $f(z)$ ***giải tích*** trên miền đơn liên D và ***liên tục*** trên biên $C \equiv \partial D$ thì:

$$\boxed{\oint\limits_C f(z)dz = 0.}$$

VD 1. Hàm $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$ giải tích trong $D : |\,z\,| \le 1$ và liên tục trên biên ∂D nên $\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{z^2 + 4} = 0$.