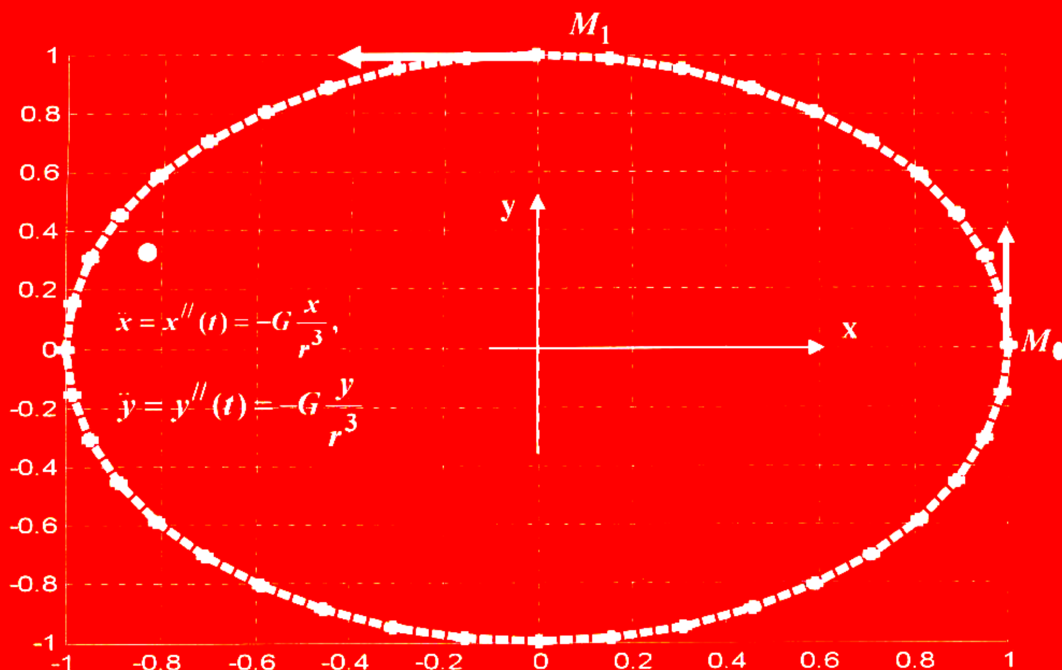
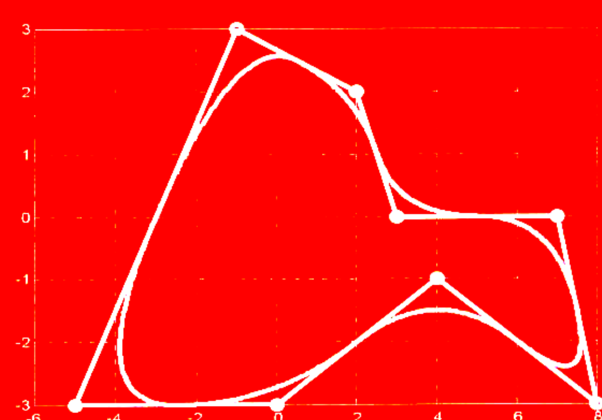
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
TS. Nguyễn Phú Vinh (chủ biên)
Tập thể Giáo viên Tổ toán Khoa KHCB

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TÍNH
(COMPUTATIONAL MATHEMATICS)
BẬC ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG





B-spline

Lưu hành nội bộ - 2009

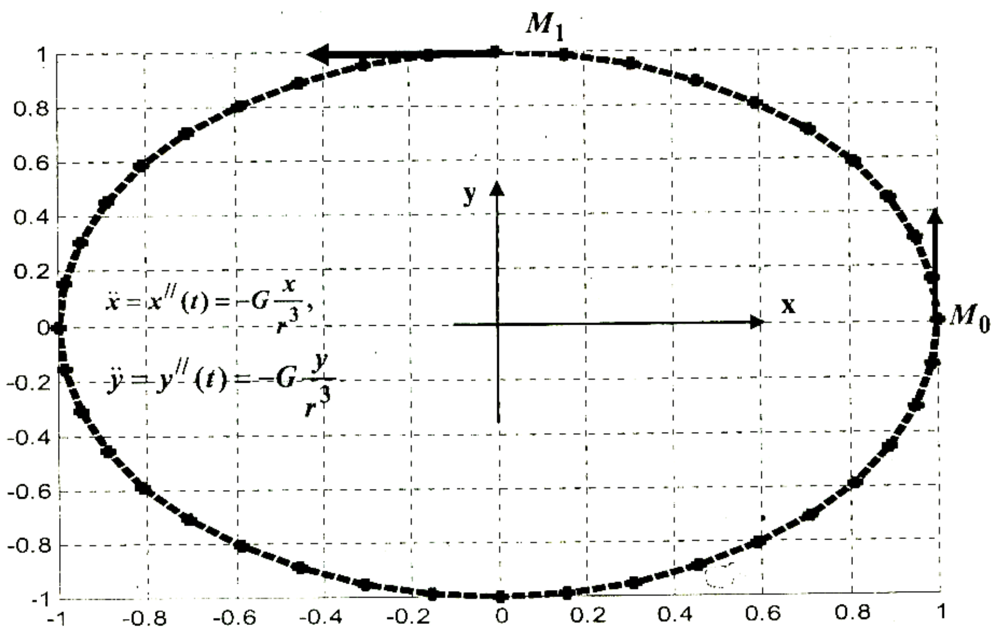
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

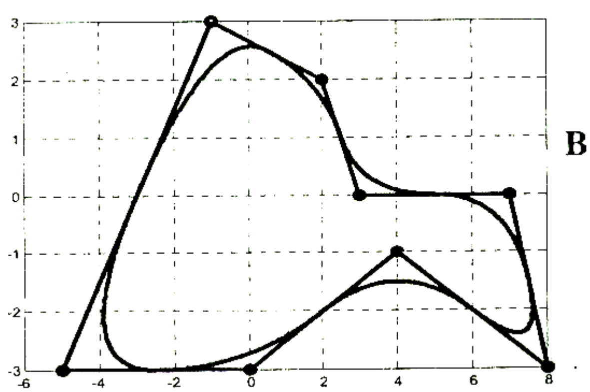
TS. Nguyễn Phú Vinh

GIÁO TRÌNH PHƯƠNG PHÁP TÍNH

(COMPUTATIONAL MATHEMATICS)

BẬC ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG





B-spline

Lưu hành nội bộ -2009

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp tính là môn toán chuyên đề dành cho khối kỹ thuật nhưng sinh viên khối kinh tế có thể tham khảo thêm môn học này như là môn học nhiệm ý, nếu như đã học xong các môn: xác suất thống kê cũng như qui hoạch tuyến tính. Đây là sách giáo khoa dùng song song với cuốn bài tập, ngân hàng câu hỏi thi tự luận và tiểu luận của cùng tác giả

Vì đây là môn học tính toán, nên nhóm tác giả muốn truyền tải đến sinh viên theo đúng tinh thần thuật toán (algorithm), và lấy excel làm công cụ chính để cài đạt thuật toán, vì bản chất của excel được thiết kế một cách hoàn mỹ theo cấu trúc con trỏ tuyến tính theo chiều ngang cũng như chiều dọc, rất phù hợp với các algorithm của phương pháp tính, hơn nữa excel (luôn có trong bộ Microsoft Office) thì quá phổ biến đối với sinh viên. Hầu hết các kết quả trong sách đều được gài công thức theo phương thức trên, và sau đó là kỹ thuật kéo thả chuột để ra các bảng kết quả. Tất nhiên một số kết quả qúa mềm và nhạy cảm thì đòi hỏi ta phải lập trình bàng Matlab hay VB.

Sách chia làm 8 chương, chương 1, sinh viên tự đọc, các chương còn lại, sinh viên cần nhớ các công thức, và các bước thuật toán, để kiểm tra lại các kết quả trong sách, bàng cách dùng excel hay máy tính 570MS. Chương 3, 4, 5, 6, 7, 8 có một số bài toán mở rộng dành cho sinh viên giỏi muốn nghiên cứu thêm hay để làm tiểu luận.

Tác giả rất cảm ơn **Thầy TS.Hiệu Trưởng Tạ Xuân Tề, Ngài** đã khích lệ và động viên cùng tất cả những cao kiến đóng góp quý báu cho lần xuất bản tập sách này, kịp ra mát độc giả trong năm học mới 2009-2010, mong ràng độc giả cũng nhiệt tình góp ý phê bình để cuốn sách ngày một hoàn thiện hơn.

Tp.HCM, ngày 01 tháng 04 năm 2009

Tiến Sĩ: Nguyễn Phú Vinh

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

§1. SỐ XẤP XỈ, SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ TƯƠNG ĐỐI

1.1 Số xấp xỉ

Nói chung, giá trị của các đại lượng dùng trong tính toán không được biết một cách chính xác. Chẳng hạn: giá trị của các đại lượng nhận được bàng phép đo, bàng thí nghiệm; giá trị của các số hữu tỷ 1/3, 1/7, 20/3, ...; giá trị của các số vô tỷ e, π, $\sqrt{2}$, ... Vì vậy trong tính toán, chúng ta làm việc chủ yếu với giá trị xấp xỉ (còn gọi là giá trị gần đúng) của các đại lượng.

Định nghĩa 1.1 a gọi là số xấp xỉ của số đúng A, ký hiệu $a \approx A$, nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Nếu $a<A$ thì a gọi là xấp xỉ thiếu của A. Nếu $a>A$ thì a gọi là xấp xỉ thừa của A.

Thí dụ 1.1. Đối với số π thì 3,14 là xấp xỉ thiếu của π, còn 3,15 là xấp xỉ thừa của π, vì dễ dàng thấy ràng

$$3,14 < \pi < 3.15$$

1.2 Sai số tuyệt đối

Định nghĩa 1.2 Hiệu $\Delta a = A - a$ (hoặc $\Delta a = a - A$) gọi là sai số của xấp xỉ a. Trị tuyệt đối:

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \qquad (1.1)$$

Gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Thông thường, không biết số đúng A, do đó không xác định được sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Vì vậy, cùng với khái niệm sai số tuyệt đối người ta đưa ra khái niệm sai số tuyệt đối giới hạn.

Định nghĩa 1.3 Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Do đó, nếu gọi Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a thì:

$$\Delta = |\Delta| = |A - a| \le \Delta_a \qquad (1.2)$$

Từ đó, suy ra:

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a \qquad (1.3)$$

Vậy $a - \Delta_a$ là xấp xỉ thiếu của A, còn $a + \Delta_a$ là xấp xỉ thừa của A. Để đơn giản, thường qui ước viết (1.3) dưới dạng.

$$A = a \pm \Delta_a \qquad (1.4)$$

Thí dụ 1.2 Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a=3,14 thay cho số π.

Giải.

Vì: $3,14 < \pi < 3,15$ nên:

$$|a-\pi| < 0,01$$

và có thể chọn $\Delta_a = 0,01$.

Nếu chú ý rằng: $3,14 < \pi < 3,142$ thì

$$|a-\pi| < 0,002$$

Và do đó nhận giá trị tốt hơn $\Delta_a = 0,002$; ...

Qua thí dụ trên, thấy rằng định nghĩa sai số tuyệt đối giới hạn không đơn trị: sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số bất kỳ trong tập vô hạn các số không âm Δ_a thỏa mãn (1.2). Vì vậy, trong thực hành, người ta thường chọn Δ_a là số nhỏ nhất có thể được, thỏa mãn (1.2).

1.3 Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối hoặc sai số tuyệt đối giới hạn không thể hiện một cách đầy đủ mức độ chính xác của phép đo hoặc tính toán. Chẳng hạn, đo chiều dài hai cái trục, nhận được những kết quả sau:

$$l_1 = 112,25cm \pm 0,1cm$$

$$l_2 = 7,3cm \pm 0,1cm$$

Tuy sai số tuyệt đối giới hạn của hai phép đo trên bằng nhau nhưng rõ ràng phép đo l_1 chính xác hơn phép đo l_2. Để thể hiện điều đó người ta đưa vào những khái niệm sau:

Định nghĩa 1.4 Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ, là:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A-a|}{|A|} \tag{1.5}$$

Với giả thiết $A \neq 0$. Từ đó: $\Delta = |A| \cdot \delta$.

Định nghĩa 1.5 Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ_a, là số không nhỏ hơn sai số tương đối của số xấp xỉ a. Do đó:

$$\delta \le \delta_a \tag{1.6}$$

nghĩa là $\dfrac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$

Từ đó: $\Delta \le |A| \cdot \delta_a$ và có thể chọn:

$$\Delta_a = |A| \cdot \delta_a \tag{1.7}$$

Vì thông thường không biết số đúng A cho nên trong thực hành, thay cho (1.7), người ta thường dùng công thức:

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a \qquad (1.8)$$

Chú ý rằng sai số tuyệt đối và sai số tương đối giới hạn có cùng thứ nguyên với số xấp xỉ, còn sai số tương đối và sai số tương đối giới hạn không có thứ nguyên.

Thay (1.8) vào (1.4), ta có:

$$A = a(1 \pm \delta_a) \qquad (1.9)$$

Trở lại kết quả phép đo chiều dài của hai cái trục nêu trên, dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của phép đo l_1, nhỏ hơn sai số tương đối giới hạn của phép đo l_2.

§2 CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

2.1 Chữ số có nghĩa

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Chẳng hạn 20,25 có 4 chữ số; 0,03047 có 6 chữ số.

Định nghĩa 1.6 Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

Thí dụ 1.3 Số 20,25 có 4 chữ số có nghĩa. Số 0,03047 cũng có 4 chữ số có nghĩa.

2.2 Chữ số đáng tin

Biết rằng mọi số thực a có thể biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoạc vô hạn:

$$\begin{aligned} a = \pm(\alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \alpha_{m-2}10^{m-2} + \cdots + \\ + \alpha_{m-n+1}10^{m-n+1}) \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Trong đó m là số nguyên, $0 \le \alpha_i \le 9 \;\; (i = m-1, m-2, \ldots), 0 \le \alpha_m \le 9$.

Chẳng hạn:

$$324,59 = 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$$

Bây giờ, giả sử số a biểu diễn dưới dạng (1.10) là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a.

Định nghĩa 1.7 Trong (1.10), chữ số α_{m-n+1} gọi là chữ số đáng tin nếu:

$$\Delta_a \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \tag{1.11}$$

và gọi là chữ số nghi ngờ nếu:

$$\Delta_a > \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \tag{1.12}$$

Thí dụ 1.4 Số xấp xỉ $a = 3,7284$ với $\Delta_a = 0,0047$ có 3 chữ số đáng tin là 3, 7, 2 và hai chữ số nghi ngờ đó là 8, 4.

Rõ ràng nếu α_{m-n+1} là chữ số đáng tin thì những chữ số ở bên trái nó cũng là những chữ số đáng tin, nếu α_{m-n+1} là chữ số nghi ngờ thì những chữ số bên phải nó cũng là những chữ số nghi ngờ.

2.3 Cách viết số xấp xỉ

Cho số xấp xỉ a của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Có hai cách viết số xấp xỉ:

Cách thứ nhất là viết số xấp xỉ a kèm theo sai số tuyệt đối giới hạn: $a \pm \Delta_a$, chẳng hạn $17,358 \pm 0,003$. Cách này thường được dùng để biểu diễn kết quả của phép tính toán hoặc phép đo.

Cách thứ hai là viết số xấp xỉ a theo qui ước: mọi chữ số có nghĩa đồng thời là những chữ số đáng tin. Điều đó có nghĩa là sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a không lớn hơn một nữa đơn vị của chữ số ở hàng cuối cùng bên phải. Chẳng hạn $a = 23,54$ thì $\Delta \le (1/2) \cdot 10^{-2}$. Trong các bảng số thường dùng như bảng lôgarit, bảng các hàm số lượng giác, ... người ta viết các số xấp xỉ theo cách thứ hai

§3. SỰ QUY TRÒN SỐ VÀ SAI SỐ QUY TRÒN

Khi tiến hành tính toán, nếu số a có quá nhiều chữ số, không tiện cho việc tính toán hoặc không ghi hết được vào máy tính, người ta phải bỏ đi một vài chữ số ở cuối và nhận được số a_1. Việc làm đó là sự quy tròn số. Trị tuyệt đối của hiệu $a_1 - a$ gọi là sai số quy tròn tuyệt đối, ký hiệu là

$$\theta_{a_1} = |a_1 - a|$$

Quy tắc quy tròn số thường được dùng nhằm đảm bảo cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn một nữa đơn vị của chữ số ở hàng giữ lại cuối cùng bên phải. Điều đó có nghĩa là: nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng bên phải một đơn vị; nếu chữ số bỏ đi <5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng bên phải.

Thí dụ 1.5 Quy tròn số $\pi = 3,1415926535...$ đến chữ số có nghĩa thứ 5, thứ 4 và thứ 3, nhận được các số xấp xỉ 3,1416; 3,142; 3,14 với sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ và $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Bây giờ giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a. Ta quy tròn số a thành a_1. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}|A - a_1| &= |A - a + a - a_1| \\ &\leq |A - a| + |a_1 - a| \leq \Delta_a + \theta_{a_1}\end{aligned}$$

Vậy có thể chọn sai số tuyệt đối giới hạn Δ_{a_1} của số đã quy tròn a_1 là:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_a + \theta_{a_1}$$

Do đó: $\Delta_{a_1} > \Delta_a$ và có thể xảy ra trường hợp một chữ số ở một hàng nào đó vốn là đáng tin, sau khi quy tròn lại trở nên nghi ngờ

Thí dụ 1.6 Cho $a = 0,35$; $\Delta_a = 0,003$. Khi đó 3 và 5 là những chữ số đáng tin. Sau khi quy tròn thành $a_1 = 0,4$, ta có:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_a + \theta_{a_1} = 0,003 + 0,05 = 0,053 > \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Vậy chữ số 4 trong a_1 là chữ số nghi ngờ. Trong trường hợp này hoặc người ta không quy tròn nữa hoặc quy tròn nhưng viết số đã quy tròn a_1 dưới dạng sau:

$$a_1 = 0,4 \pm 0,052$$

(nghĩa là số xấp xỉ a_1 được viết theo cách thứ nhất).

§4. XÁC ĐỊNH SAI SỐ CỦA HÀM SỐ BIẾT SAI SỐ CỦA CÁC ĐỐI SỐ

4.1 Công thức tổng quát của sai số

Cho hàm số khả vi:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

và giả sử biết sai số tuyệt đối giới hạn Δ_{x_i} $(i = \overline{1,n})$ của các đối số x_i $(i = \overline{1,n})$, hãy xác định sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u của hàm số u.

Gọi U là giá trị đúng của số xấp xỉ u, X_i là giá trị đúng của số xấp xỉ x_i ($i=\overline{1,n}$), ta có

$$|U-u|=|\Delta u|=|f(X_1,X_2,\ldots,X_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)|$$

$$\approx|u|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_i-x_i)\right|= \qquad (1.13)$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||\Delta x_i|\le\sum\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$$

Vậy có thể lấy:

$$\Delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i} \qquad (1.14)$$

Chia hai vế của (1.13) cho $|u|$ nhận được đánh giá sau đối với sai số tương đối của hàm số u:

$$\delta=\frac{|\Delta u|}{|u|}\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|\Delta_{x_i}$$

Do đó:

$$\delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right|\Delta_{x_i} \qquad (1.15)$$

Thí dụ 1.7: Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu $V=(1/6)\pi d^3$, biết đường kính $d=3{,}70cm\pm0{,}05cm$ và $\pi\approx3{,}14$.

Giải.

Xem π và d là những đối số của hàm số V, ta có:

$$\frac{\partial V}{\partial\pi}=\frac{1}{6}d^3=\frac{1}{6}(3{,}70)^3=8{,}4422$$

$$\frac{\partial V}{\partial d}=\frac{1}{2}\pi d^2=\frac{1}{2}\cdot3{,}14\cdot(3{,}70)^2=21{,}4933$$

Dùng công thức (1.14), nhận được:

$$\Delta_V=\left|\frac{\partial V}{\partial\pi}\right|\Delta_\pi+\left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|\Delta_d=8{,}4422\cdot0{,}0016+21{,}4933\cdot0{,}005$$

$$=1{,}0882$$

Do đó: $V = \frac{1}{6}\pi d^3 = 26,5084cm^3 \pm 1,0882cm^3$ và :

$$\delta_V = \frac{1,0882}{26,5084} = 0,04105 \approx 4,1\%$$

4.2 Sai số của tổng đại số

Xét hàm số:

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$$

Áp dụng công thức (1.14), nhận được:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x2} + \cdots + \Delta_{x_n} \qquad (1.16)$$

Từ đó:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x2} + \cdots + \Delta_{x_n}}{|u|} \qquad (1.17)$$

Chú ý về sai số của hiệu. Xét hàm số:

$$u = x_1 - x_2$$

với $x_1 > 0, x_2 > 0$ là hai số xấp xỉ. Khi đó, theo (1.16) và (1.17), có:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \qquad (1.18)$$

và

$$\delta_u = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}}{|x_1 - x_2|} \qquad (1.19)$$

Vì vậy cần đặc biệt lưu ý hiện tượng mất chính xác khi trừ hai số: nếu hai số xấp xỉ x_1 và x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) có giá trị gần bằng nhau thì $|x_1 - x_2|$ sẽ nhỏ; từ (1.19) dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của số trừ và của số bị trừ vẫn nhỏ.

Thí dụ 1.8 Hãy tính hiệu của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 47,132$ và $x_2 = 47,111$ và xác định sai số tương đối giới hạn của x_1, của x_2 và của hiệu.

Giải.

Ta có

$$u = x_1 - x_2 = 47,132 - 47,111 = 0,021$$

Theo (1.18), sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u được xác định bởi:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} = \frac{1}{2}10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-3} = 0,001$$

Do đó hiệu $u = 0,021$ chỉ có hai chữ số đáng tin, còn 1 là chữ số nghi ngờ.

Dùng (1.8) và (1.19) ta có

$$\delta_{x_1} = \frac{0,0005}{47,123} \approx 0,00001$$

$$\delta_{x_2} = \frac{0,0005}{47,111} \approx 0,00001$$

$$\delta_u = \frac{0,001}{0,021} \approx 0,05$$

Như vậy, sai số tương đối giới hạn của hiệu lớn hơn sai số tương đối giới hạn của số bị trừ và của số trừ khoảng 5000 lần. Vì vậy, khi tính toán, người ta cố gắng tránh phép trừ hai số dương có giá trị gần bằng nhau bằng cách biến đổi biểu thức của hiệu (trong trường hợp có thể được).

Thí dụ 1.9 Tính hiệu

$$u = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$$

với ba chữ số đáng tin.

Giải

Vì $\sqrt{2,01} = 1,41774469...; \sqrt{2} = 1,41421356...$

nên ta có thể xem

$$\sqrt{2,01} \approx 1,41774; \sqrt{2} \approx 1,41421 \text{ và:}$$

$$u = 1,41774 - 1,41421 = 0,00353$$

Có thể thu được kết quả trên mà chỉ cần lấy:

$$\sqrt{2,01} \approx 1,42; \sqrt{2} \approx 1,41$$

nếu viết hiệu u dưới dạng

$$u = \frac{\left(\sqrt{2,01} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}\right)} = \frac{2,01 - 2}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}} = \frac{0,01}{1,42 + 1,41} = \frac{0,01}{2,83} = 0,00353$$

Từ thí dụ trên, rút ra quy tắc thực hành như sau: nếu bắt buộc phải tính hiệu của hai số dương có giá trị gần bằng nhau, cần lấy số trừ và số bị trừ nhiều chữ số đáng tin cậy để dự trữ (nếu điều đó có thể làm được). Chẳng hạn, nếu biết rằng khi trừ hai số dương x_1 và x_2, m chữ số có nghĩa đầu tiên bị mất và kết quả cần có n chữ số đáng tin thì cần lấy x_1 và x_2 có $m + n$ chữ số đáng tin.

4.3 Sai số của tích

Xét hàm số

$$u = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

Áp dụng công thức (1.15), nhận được:

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n} \qquad (1.20)$$

Từ đó

$$\Delta_u = |u|\,\delta_u \qquad (1.21)$$

Đạc biệt, nếu $u = x^m$ (m nguyên dương) thì:

$$\delta_u = m\delta_x \qquad (1.22)$$

4.4 Sai số của thương

Xét hàm số $u = \dfrac{x_1}{x_2}$ $(x_2 \neq 0)$

Áp dụng công thức (1.15), ta có

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \qquad (1.23)$$

Từ đó

$$\Delta_u = |u|\,\delta_u \qquad (1.24)$$

BÀI TẬP

1. Khi xác định hằng số khí của không khí, nhận được $R = 29,25$. Hãy xác định các giới hạn của R biết sai số tương đối giới hạn của giá trị R là 1%.

2. Đo trọng lượng của 1 dm^3 nước ở $0^o C$ nhận được:

$$p = 999,847g \pm 0,001g$$

Hãy xác định sai số tương đối giới hạn của phép đo trên.

3. Cho: a) $a_1 = 1,3241;\quad \Delta_{a_1} = 0,45 \cdot 10^{-4}$

b) $a_2 = 0,5364;\quad \Delta_{a_2} = 0,5 \cdot 10^{-3}$

c) $a_3 = 0,1189;\quad \Delta_{a_3} = 0,78 \cdot 10^{-3}$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1, a_2 và a_3.

4. Cho a) $a_1 = 23,8541;\quad \delta_{a_1} = 0,3 \cdot 10^{-3}$

b) $a_2 = 5,3442;\quad \delta_{a_2} = 0,1\cdot 10^{-2}$

c) $a_3 = 0,4795;\quad \delta_{a_3} = 0,0005$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1, a_2 và a_3.

5. Cho số $e = 2,718281828459045...$ Hãy quy tròn số e đến chữ số có nghĩa thou 13, thứ 12 và thứ 11 và xác định sai số quy tròn tuyệt đối.
6. Lấy $a = 2,718$ thay cho số e. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a.
7. Cần tính $\sqrt{2}$ với bao nhiêu chữ số thập phân để sai số không vượt quá 0,0002.
8. Cho số xấp xỉ $a = 68,32$ với sai số tương đối giới hạn là $0,1\%$. Hãy xác định số chữ số đáng tin của số a.
9. Để xác định môđun đàn hồi (môđun lăng) E theo độ võng của thanh cát mạt ngang hình chữ nhật, người ta dùng công thức:

$$E = \frac{1^3 p}{4a^3 bs}$$

Trong đó l-chiều dài của thanh; a và b-chiều rộng và chiều dài của mạt cắt ngang của thanh; s-độ võng; p-tải trọng. Hãy tính sai số tương đối giới hạn khi xác định môđun đàn hồi E, biết $p = 20kg$, $\delta_p = 0,1\%$; $a = 3mm$; $\delta_a = 1\%$; $b = 44mm$; $\delta_b = 1\%$; $l = 50cm$, $\delta_l = 1\%$; $s = 2,5cm$, $\delta_s = 1\%$.

10. Cho hàm số $u = \ln(x_1 + x_2^2)$. Hãy xác định giá trị của hàm số u tại $x_1 = 0,97$, $x_2 = 1,132$, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u, biết: mọi chữ số có nghĩa của x_1 và x_2 là những số đáng tin.
11. Hãy tính hiệu của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 5,125$; $x_2 = 5,135$ và xác định sai số tương đối giới hạn của x_1, x_2 và của hiệu.
12. Hãy tính tích u của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 12,2$; $x_2 = 73,56$ và xác định số chữ số đáng tin của tích u.
13. Hãy tính thương $u = x_1 / x_2$ của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 5,735$; $x_2 = 1,23$ và xác định sai số tương đối giới hạn δ_u, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u.

14. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a và chữ số đáng tin của cạnh a của hình vuông, biết diện tích hình vuông $s = 16,45cm^2$ với $\Delta_s = 0,01$.

Đáp số

1. $\Delta_R = 0,03; \quad 29,22 \le R \le 29,28$
2. $\delta_p = 10^{-4}\%$
3. a) 5 b) 3 c) 2
4. a) 3 b) 3 c) 3
5. $2,718281828459; \quad \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-12}$

   $2,71828182846; \quad \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-11}$

   $2,7182818285; \quad \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-10}$
6. $\delta_a = 0,018\%$
7. Ít nhất 5 chữ số thập phân.
8. a có hai chữ số đáng tin.
9. $\delta_E = 0,081 = 8,1\%$.
10. $u = 0,81; \Delta_u = 0,27\cdot 10^{-2}; \delta_u = 0,33\cdot 10^{-2}$
11. $u = 0,01; \delta_{x_1} \approx 0,01\%; \delta_{x_2} \approx 0,01\%; \delta_u = 10\%$
12. $u = 897,432; \delta_u = 0,0042; \Delta_u \approx 3,8; u = 897 \pm 4$

    (u có hai chữ số đáng tin)
13. $u = 4,66; \delta_u = 0,0042; \Delta_u \approx 0,02$
14. $a = \sqrt{s} = 4,056cm; \delta \approx 0,0003; \Delta_a \approx 0,0012$; a có ba chữ số đáng tin.

CHƯƠNG 2
TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ SIÊU VIỆT

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tìm nghiệm của phương trình:

$$f(\mathrm{x}) = 0 \qquad (2.1)$$

Trong đó f là một hàm số đại số hoặc siêu việt bất kỳ là một bài toán thường gặp trong kỹ thuật. Như đã biết, nếu (2.1) là phương trình đại số bậc n:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (2.2)$$

với n = 1 hoặc n = 2, ta có công thức tính nghiệm của chúng một cách đơn giản. Người ta cũng tìm ra những công thức tính nghiệm của (2.2) khi n = 3 và n = 4, nhưng việc sử dụng chúng khá phức tạp. Còn đối với những phương trình đại số từ bậc năm trở lên thì không có công thức tính nghiệm. Hơn nữa, đối với phương trình siêu việt dạng (2.1) như :

$$\cos x + 1 - 5x = 0$$

thì không có công thức tính nghiệm. Ngoài ra ta thường gặp trường hợp phương trình (2.1) chứa các hệ số chỉ biết một cách gần đúng, khi đó việc xác định chính xác nghiệm của (2.1) không có ý nghĩa. Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt cũng như việc đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

Trong chương này, ta xét việc tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) với giả thiết hàm số f(x) xác định và liên tục trong một khoảng hữu hạn hoặc vô hạn. Mỗi số thực ξ thoả mãn: $f(\xi) = 0$ gọi là nghiệm thực của phương trình (2.1) hoặc không điểm của hàm số f(x). Ta cũng giả thiết thêm rằng phương trình (2.1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (2.1) tồn tại một miền lân cận không chứa nghiệm thực khác của phương trình.

Việc tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) được tiến hành theo hai bước:

<u>Bước 1</u>: tìm khoảng cách ly nghiệm, nghĩa là tìm khoảng (a, b) chứa một và chỉ một nghiệm thực của phương trình (2.1).

<u>*Bước 2:*</u> Xuất phát từ khoảng cách ly nghiệm ở bước 1, tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) đạt độ chính xác yêu cầu bằng một phương pháp gần đúng.

2. KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

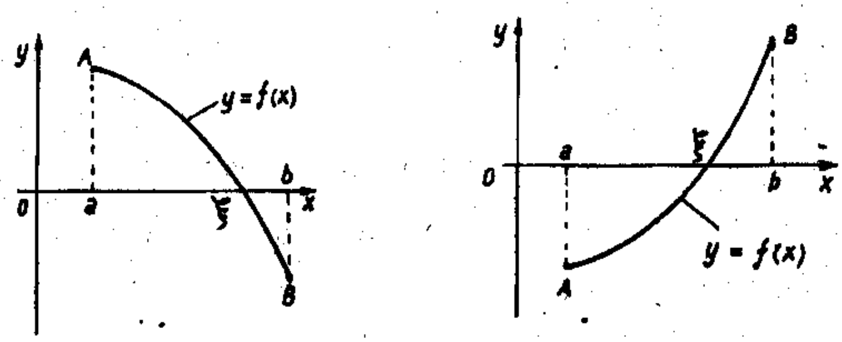
Định lý 2.1 dưới đây (đã biết trong giáo trình Toán học cao cấp) cho ta cách tìm khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1).

Định lý 2.1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong (a, b), $f(a), f(b) < 0$, $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b) chỉ có một nghiệm thực ξ duy nhất của phương trình (2.1).

Ý nghĩa hình học của định lý 2.1 như sau: một đường cong liền nét

$y = f(x)$, chỉ tăng hoặc chỉ giảm, nối liền hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ nằm ở hai phía khác nhau của trục Ox, cắt trục Ox tại một điểm duy nhất $x = \xi$ (hình 2.1).

Từ định lý 2.1 suy ra rằng (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) nếu $f(a), f(b) < 0$, $f(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b). Để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) có hai phương pháp: giải tích và hình học.



Hình 2.1

1. Phương pháp giải tích:

Xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại các điểm mút của miền xác định của hàm số $f(x)$ và tại các điểm trung gian $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ... $x = \alpha_n$. Những điểm này thường được lựa chọn căn cứ vào đặc điểm của hàm số $f(x)$. Mỗi khoảng, ở đó hai điều kiện trên được thoả mãn là một khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1). Thông thường để tiện, người ta thường dùng quá trình chia đôi, chia khoảng cách xác định hàm số $f(x)$ thành hai, bốn, tám, ... phần bằng nhau và xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại các điểm chia.

Chú ý phương trình đại số bậc n (2.2) không nhiều hơn n nghiệm thực, do đó nếu ta đã tìm được n+1 điểm ở đó: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ lần lượt thay đổi dấu thì điều đó có nghĩa là phương trình (2.2) có n nghiệm thực và từ n+1 điểm trên, ta dễ dàng xác định được n khoảng cách ly nghiệm.

Thí dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình:

$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải:

Thành lập bảng dấu của hàm số $f(x)$:

x	-∞	-3	-2	0	1	2	3	+∞
Dấu của $f(x)$	-	-	+	+	-	-	+	+

Từ bảng trên ta tìm được bốn điểm -3, -2, 1 và 3, ở đó $x^3 - 6x + 2$ lần lượt thay đổi dấu. Kết hợp với điều kiện $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi ta suy ra (-3, -2); (0, 1) và (2, 3) là ba khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho.

Trong trường hợp $f'(x)$ là một hàm số liên tục và phương trình $f'(x) = 0$ dễ tìm nghiệm, để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) ta chỉ cần xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại các không điểm của đạo hàm $f'(x)$ hoạc tại các điểm gần các không điểm của đạo hàm $f'(x)$.

Thí dụ 2.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình:

$$f(x) \equiv 2^x - 5x - 3 = 0$$

Giải:

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5$. Do đó $f'(x) = 0$ khi:

$2^x \ln 2 - 5 = 0$; $\quad 2^x \ln 2 = 5$

$x\lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0,6990 + 0,1592}{0,3010} = \frac{0,8582}{0,3010} \approx 2,85$$

Ta thành lập bảng dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại hai điểm 2 và 3 gần không điểm của đạo hàm $f'(x)$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Dấu của $f(x)$	+	-	-	+

Từ bảng trên ta suy ra phương trình đã cho hai nghiệm thực. Để tìm được hai khoảng hẹp hơn chứa hai nghiệm thực, ta xét bảng dấu sau:

x	-1	0	2	3	4	5
Dấu của $f(x)$	+	-	-	-	-	+

Vậy khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho là (-1, 0) và (4, 5).

2. Phương pháp hình học:

Trong trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ dễ vẽ, để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1), ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên giấy kẻ ô vuông. Hoành độ các giao điểm của đồ thị với trục hoành Ox cho ta các giá trị thô của các nghiệm thực của phương trình (2.1). Từ đồ thị , ta dễ dàng tìm được các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1).

Nếu đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khó vẽ, ta đưa phương trình (2.1) về phương trình tương đương:

$$g(x) = h(x)$$

sao cho đồ thị của hai hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ dễ vẽ. Ta vẽ hai đồ thị đó trên giấy kẻ ô vuông và trên cùng một hệ trục tọa độ. Hoành độ các giao điểm của hai đồ thị cho ta ác giá trị thô của các nghiệm thực của phương trình (2.1). Từ đồ thị, ta cũng dễ dàng tìm được các khoảng cách lý nghiệm của phương trình (2.1).

<u>Thí dụ 2.3:</u>

Dùng phương pháp đồ thị, tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình: $f(x) \equiv x^3 - 3x - 1 = 0$

Giải

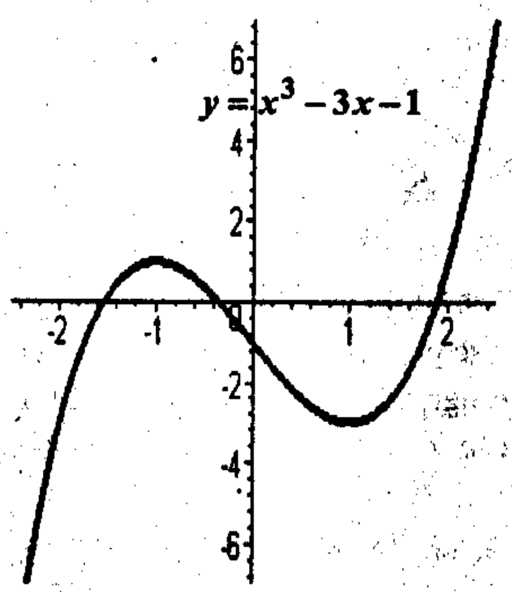
Cách 1 Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ trên giấy kẻ ô vuông (hình 2.2). Ta thấy rằng đồ thị cát trục hoành Ox tại ba điểm, do đó phương trình đã cho có ba nghiệm thực.

Từ đồ thị, ta tìm được ba khoảng cách ly nghiệm: (-2, -1); (-1, 0) và (1, 2).

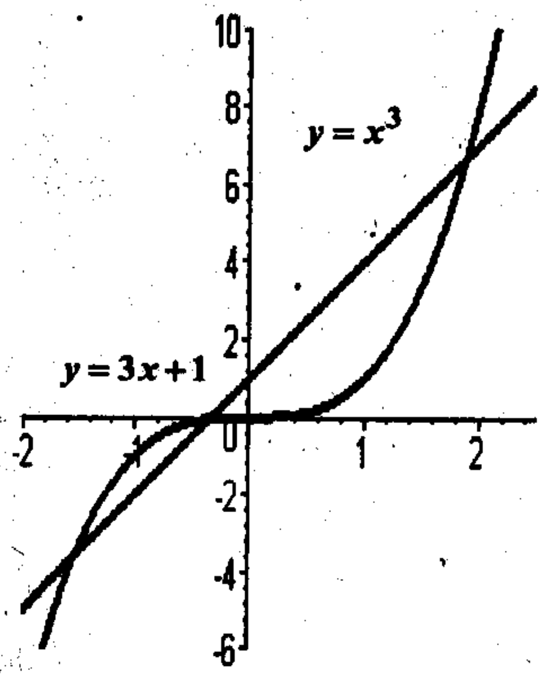
Cách 2. Đưa phương trình đã cho về dạng tương đương như sau:

$x^3 = 3x + 1$

Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x^3$ và $y = 3x + 1$ trên giấy kẻ ô vuông và trên cùng một hệ trục toạ độ (hình 2.3). Ta thấy rằng: hai đồ thị cát nhau tại ba điểm do đó phương trình đã cho có ba nghiệm thực. Từ đồ thị, ta cũng tìm được ba khoảng cách ly nghiệm như ở cách 1.



Hình 2.2



Hình 2.3

3. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

3.1. Nội dung phương pháp chia đôi

Giả sử (a, b) là khoảng cach ly nghiệm của phương trình (2.1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau: ta chia đôi khoảng (a, b). Nếu

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ thì $\xi=\frac{a+b}{2}$ là nghiệm đúng của phương trình (2.1). Nếu $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, ta chọn một trong hai khoảng $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ và $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ mà tại hai mút của khoảng hàm số $f(x)$ có dấu khác nhau, làm khoảng cách ly nghiệm mới. Ta gọi khoảng này là (a_1, b_1), nó có độ dài bàng nữa khoảng (a, b):

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}(a-b)$$

Ta lại chia đôi khoảng (a_1, b_1) và tiếp tục làm như trên.......

3.2. Sự hội tụ của phương pháp chia đôi

Nếu ta thực hiện vô hạn lần phương pháp chia đôi đối với khoảng (a, b) thì hoạc tại một lần nào đó, điểm giữa của khoảng là nghiệm đúng của phương trình (2.1) (trường hợp này ít xảy ra) hoạc ta nhận được một dãy vô hạn các khoảng chồng lên nhau và thu nhỏ dần (a_1, b_1), (a_2, b_2),..... (a_n, b_n), ... sao cho:

$$f(a_n)\,.f(b_n)<0 \qquad (2.3)$$

và

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\quad (n=1, 2....) \qquad (2.4)$$

Vì các mút trái $a_1, a_2,....a_n,....$ tạo nên dãy đơn điệu không giảm và bị chạn trên bởi số b, còn các mút phải $b_1, b_2,....b_n,....$ tạo nên dãy đơn điệu không tăng và bị chạn bởi số a, nên khi $n\to+\infty$, từ đẳng thức (2.4), ta nhận được:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=\xi}$$

Cho $n\to+\infty$ trong bất đẳng thức (2.3), do sự liên tục của hàm số $f(x)$, ta có:

$$\left[f(\xi)\right]^2\leq 0$$

Vậy $f(\xi)=0$, và ξ là nghiệm của phương trình (2.1).

3.3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Trong thực hành, ta không thể thực hiện phương pháp chia đôi vô hạn lần để nhận được nghiệm đúng của phương trình (2.1) mà chỉ có thể áp dụng n lần phương pháp chia đôi, với n là một số nguyên, dương, hữu hạn Dừng lại ở lần thứ n, ta có:

$$a_n \le \xi \le b_n \text{ và } b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

Vậy có thể lấy nghiệm gần đúng là:

a) a_n, khi đó sai số của nghiệm gần đúng là:

$$|a_n - \xi| \le b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

b) b_n, khi đó sai số của nghiệm gần đúng là:

$$|b_n - \xi| \le b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

c) $\frac{a_n + b_n}{2}$, khi đó sai số của nghiệm gần đúng là:

$$\boxed{\left|\frac{a_n + b_n}{2} - \xi\right| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)}$$

3.4 Ưu nhược điểm của phương pháp chia đôi

Ưu điểm của phương pháp chia đôi là đơn giản, dễ lập chương trình chạy trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi, ta chỉ phải tính một giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng. Nhược điểm của phương pháp là tốc độ hội tụ chậm.

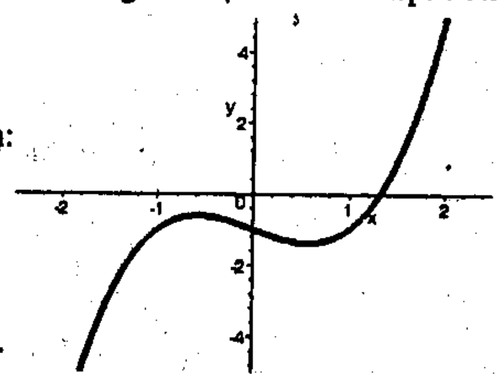
Thí dụ 2.4

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

bằng phương pháp chia đôi,

biết khoảng cách ly nghiệm là (1;2).



Giải:

Ta có $f(1) = -1$; $f(2) = 5$. Áp dụng liên tiếp phương pháp chia đôi với khoảng (1, 2), ta nhận được bảng kết quả sau (xem trang sau).

Dừng lại ở lần thứ 6, ta có thể lấy nghiệm gần đúng là 1,32032 với sai số:

$$|1{,}32032 - \xi| \le \frac{1}{2}0{,}01563 = 0{,}00782.$$

Vậy $\xi = 1{,}320 \pm 0{,}008$. Hai cận cận mới liên hệ qua 2 cận cũ qua thuật toán như sau: (tích f âm lấy như cũ, dương thì thay mới)

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}, & f(a_{n-1}).f(x_{n-1}) < 0 \\ x_{n-1}, & f(a_{n-1}).f(x_{n-1}) > 0 \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} b_{n-1}, & f(b_{n-1}).f(x_{n-1}) < 0 \\ x_{n-1}, & f(b_{n-1}).f(x_{n-1}) > 0 \end{cases}$$

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1,5	0,875	1
1	1	1,5	1,25	-0,29688	0,5
2	1,25	1,5	1,375	0,22461	0,25
3	1,25	1,375	1,3125	-0,05151	0,125
4	1,3125	1,375	1,34375	0,08261	0,0625
5	1,3125	1,34375	1,32813	0,01458	0,03125
6	1,3125	1,32813	1,32032		0,01563

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP

4.1. Nội dung phương pháp lặp

Phương pháp lạp là một trong những phương pháp quan trọng để giải gần đúng phương trình (2.1). Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1). Nội dung của phương pháp lạp như sau: đưa phương trình (2.1) về phương trình tương đương:

$$x = \varphi(x) \qquad (2.5)$$

Có nhiều cách đưa phương trình (2.1) về phương trình (2.5). Chẳng hạn, đối với phương trình:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

ta có thể viết:

a) $x = x^3 - 1$

b) $x = (1+x)^{1/3}$

c) $x = x^{-1} + x^{-2}$

Bây giờ, ta chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu.

Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2.5), ta nhận được nghiệm gần đúng nhất:

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (2.6)$$

Thay $x_0 = x_1$ vào vế phải của (2.6), ta nhận được nghiệm gần đúng thứ hai:

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

Lạp lại nhiều lần quá trình trên, ta nhận được các nghiệm gần đúng:

$$x_3 = \varphi(x_2)$$

$$x_4 = \varphi(x_3)$$

....

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (2.7)$$

....

Nếu dãy các nghiệm gần đúng $\{x_n\}$, n = 1, 2, 3, ... nhận được từ (2.7) hội tụ, nghĩa là:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$$

thì chọn $n \to +\infty$ trong (2.7), với giả thiết hàm số $\varphi(x)$ liên tục trong (a, b), ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1})$$

hay $\qquad \xi = \varphi(\xi)$

Điều đó chứng tỏ rằng ξ là nghiệm đúng của phương trình (2.5) và do đó cũng là nghiệm đúng của phương trình (2.1).

4.2. Sự hội tụ của phương pháp lặp:

Định lý 2.2 sau đây cho ta cách chọn hàm số $\varphi(x)$ để dãy $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ hội tụ đến nghiệm ξ.

Định lý 2.2 Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm (chứa nghiệm $x = \xi$ của phương trình $f(x) = 0$; $\varphi(x)$ và $\varphi'(x)$ là những hàm số liên tục trong {a, b}, với $\varphi(x)$ được xác định bởi phương trình $x = \varphi(x)$, tương đương phương trình $f(x) = 0$; mọi $\varphi(x) \in \{a, b\}$ với $x \in \{a, b\}$. Nếu $|\varphi'(x)| \le q < 1$ đối với $\forall x \in \{a, b\}$ $x_0 \in \{a, b\}$ thì dãy các nghiệm gần đúng $\{x_n\}$, n = 1, 2, 3, ...nhận được từ (2.7), hội tụ đến nghiệm ξ.

Chứng minh.

Vì ξ là nghiệm. Nên:

$$\xi = \varphi(\xi) \qquad (2.8)$$

Đem (2.6) trừ (2.8), ta có:

$$x_1 - \xi = \varphi(x_0) - \varphi(\xi)$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange) vào vế phải, ta nhận được:

$$x_1 - \xi = \varphi'(e_1)(x_0 - \xi)$$

với e_1 gồm giữa x_0 và ξ, và:

$$|x_1-\xi|=|\varphi'(e_1)||x_0-\xi|\le q|x_0-\xi|$$

Tương tự ta nhận được:

$$|x_2-\xi|\le q|x_1-\xi|$$

$$|x_3-\xi|\le q|x_2-\xi|$$

$$|x_n-\xi|\le q|x_{n-1}-\xi|,\ldots$$

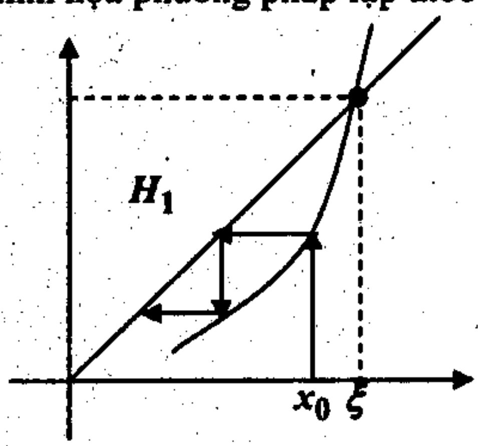
Các bất đẳng thức trên chứng tỏ rằng mọi x_n, n = 1, 2, 3....., nhận được từ (2.7), đều thuộc [a, b], nếu x_0 thuộc [a, b] và $\varphi'(x) > 0$.

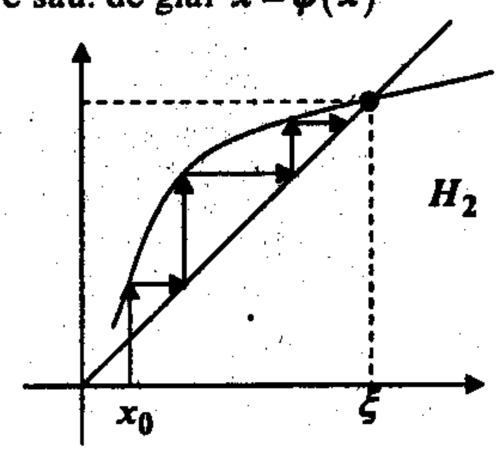
Từ các bất đẳng thức trên, chúng ta cũng nhận được:

$$|x_n-\xi|\le q^n|x_0-\xi|$$

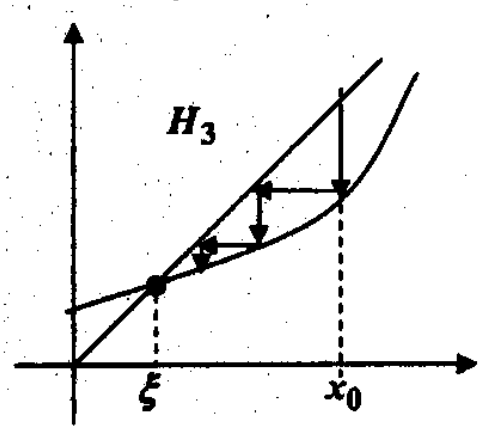
Khi $n \to +\infty$, vì $q < 1$, nên vế phải tiến đến 0. Điều đó cũng chứng tỏ rằng dãy các nghiệm gần đúng $x_1, x_2, x_3, \ldots$ hội tụ đến nghiệm ξ.

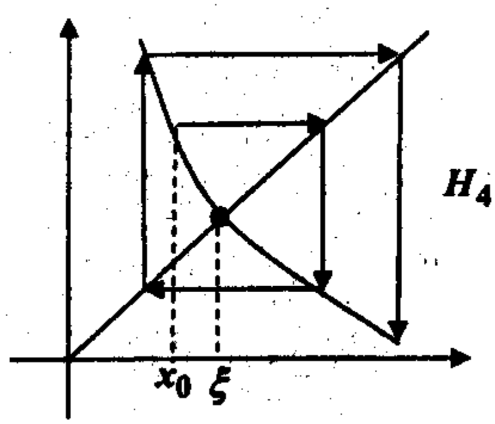
Minh họa phương pháp lạp theo 4 hình vẽ sau: để giải $x=\varphi(x)$

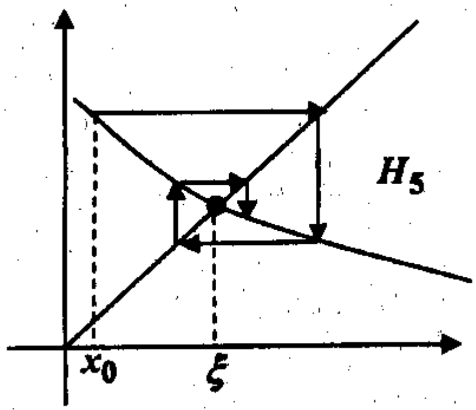




Trong đó: x_0 là điểm ban đầu, ξ là nghiệm giao của 2 đường cong:







x và $\varphi(x)$, nghĩa là ta giải phương trình: $x=\varphi(x)$, ba hình H2, H3, H5 đều hội tụ, riêng H1, H4 là phân kỳ.

4.3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Để đánh giá độ lệch giữa nghiệm gần đúng x_n, nhận được bằng phương pháp lạp và nghiệm đúng ξ của phương trình (2.1), ta xét hiệu $x_n - \xi$.

Từ chứng minh định lý 2.2, ta có:

$$|x_n-\xi|\le q|x_{n-1}-\xi|=$$
$$=q|x_{n-1}-x_n+x_n-\xi|\le q|x_{n-1}-x_n|+q|x_n-\xi|$$

Vậy: $$(1-q)|x_n-\xi|\le q|x_{n-1}-x_n| \qquad (2.9)$$

$$\boxed{|x_n-\xi|\le \frac{q}{1-q}|x_{n-1}-x_n|}$$

Ta cũng có thể viết vế phải của (2.9) dưới dạng sau. Theo (2.7), ta có: $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ và áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange), ta có:

$$x_n-x_{n-1}=\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})=$$
$$=\varphi'(e_n)(x_{n-1}-x_{n-2})$$

với e_n nằm giữa x_{n-1} và x_{n-2}.

Vì $|\varphi'(x)|\le q<1$ đối với $\forall x \in [a, b]$ nên:

$$|x_n-x_{n-1}|=|\varphi'(e_n)||x_{n-1}-x_{n-2}|\le q|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

Từ bất đẳng thức trên, chọn n = 2, 3, 4,... ta lần lượt nhận được:

$$|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|$$
$$|x_3 - x_2| \le q|x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|$$
$$-----------------$$
$$|x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$$

Thay vào vế phải của (2.9), ta có:

$$\boxed{|x_n - \xi| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|} \qquad (2.10)$$

Từ (2.10), dễ thấy ràng sự hội tụ của phương pháp lạp càng nhanh nếu q càng bé. Bất đẳng thức (2.10) cũng cho phép sau lần lạp thứ nhất (sau khi biết được x_1), xác định được số lần lạp cần tiến hành N(ε) để nhận được nghiệm gần đúng x_n đạt độ chính xác ε. Thật vậy, để $/x_n - \xi/$ không lớn hơn ε chỉ cần:

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon$$

nghĩa là:
$$N(\varepsilon) \ge \frac{\lg \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\lg q} \qquad (2.11)$$

Trong trường hợp $q \le \frac{1}{2}$, đánh giá (2.9) có dạng đơn giản như sau:

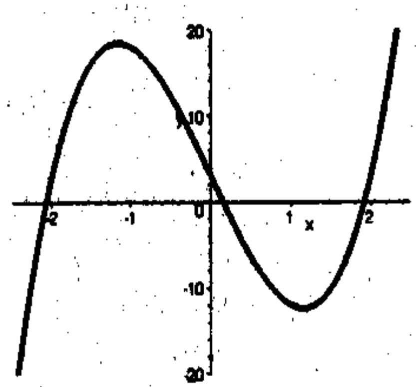
$$|x_n - \xi| \le |x_{n-1} - x_n| \qquad (2.12)$$

Thí dụ 2.5

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$

bằng phương pháp lạp với độ chính xác 10^{-4}, biết khoảng cách ly nghiệm là (0, 1).



Giải

Trước hết, cần đưa phương trình đã cho về phương trình tương đương:

x = φ(x). Có nhiều cách, chẳng hạn:

$$x = x + \left(5x^3 - 20x + 3\right), \varphi_1(x) = 5x^3 - 19x + 3$$

$$x = \sqrt[3]{(20x-3)/5}; \varphi_2 = \sqrt[3]{(20x-3)/5}$$

$$x = \left(5x^3 + 3\right)/20, \varphi_3(x) = \left(5x^3 + 3\right)/20$$

Chú ý rằng, theo định lý 2.2, nếu φ(x) thoả mãn

điều kiện $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ trên [0, 1] thì quá trình lập hội tụ. Ta có:

$$\left|\varphi_1'(x)\right| = \left|15x^2 - 19\right| > 1 \text{ trên } [0,1]$$

$$\left|\varphi_2'(x)\right| = \left|\frac{4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{20x-3}{5}\right)^2}}\right| \text{ không bé hơn 1}$$

với mọi x ∈ [0, 1]

$$\left|\varphi_3'(x)\right| = \left|3x^2/4\right| < 1 \text{ trên } [0, 1]$$

Như vậy, ta dùng $\varphi_3(x) = (5x^3 + 3)/20$,

với $\left|\varphi_3'(x)\right| = \left|3x^2/4\right| < 0,75 = q < 1$ trên [0, 1] và có công thức lập sau:

$$x_n = (5x_{n-1}^3 + 3)/20 \qquad (2.13)$$

Dùng đánh giá (2.9), thấy rằng, để nghiệm gần đúng của phương trình đã cho với độ chính xác 10^{-4}, $\left|x_n - x_{n-1}\right|$ cần thoả mãn:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{0,0001.(1-0,75)}{0,75} = 0,00003 \qquad (2.14)$$

Vậy ta bát đầu quá trình lạp bàng cách chọn x_0 là một số bất kỳ thuộc [0, 1], chẳng hạn $x_0 = 0,75$. Sau đó ta tính x_n, với n = 1, 2, 3... theo công thức (2.13), cho đến khi điều kiện (2.14) được thoả mãn. Kết quả tính toán như sau:

$$\begin{cases} x_1 = (5x_0^3 + 3)/20 = 0,25547 \\ x_2 = (5x_1^3 + 3)/20 = 0,15417 \\ x_3 = (5x_2^3 + 3)/20 = 0,15092 \\ x_4 = (5x_3^3 + 3)/20 = 0,15086 \\ x_5 = (5x_4^3 + 3)/20 = 0,15086 \end{cases}$$

Vậy ta có thể dừng lại ở lần lặp thứ 5 và nghiệm gần đúng của phương trình đã cho với độ chính xác 10^{-4} là: 0,15086.

Chú ý: Nếu lấy $x = \varphi_2(x) = \sqrt[3]{(20x-3)/5}$ và $x_0 = 0$, thì ta lại tiệm cận một nghiệm khác: $\xi = 1.92029$, lọt ra ngoài đoạn [0,1].

Thí dụ 2.5' Giải bằng phương pháp lặp: $f(x) = x^2 - 5x + 5 = 0$.

Giải

Có 2 nghiệm x=3.618033, x=1.381966

- Để tìm x=3.618033 thì ta dùng:

$$x = -\frac{1}{x-1} + 4 \Longrightarrow \left|\varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\right| < 1,\ \forall x \in [1,\infty]$$

Ta có thể lấy x_0 = 9, 0, -1, ... bất kỳ.

- Để tìm x=1.381966 thì ta dùng:

$$x = \frac{1}{5}\left(x^2 + 5\right) \Rightarrow \left|\varphi'(x) = \frac{2x}{5}\right| < 1,\ \forall x \in [1,2]$$

Ta có thể lấy x_0 = 1, 0, -1, ... bất kỳ.

- Để tìm x=1.381966 thì ta có thể dùng:

$$x = \frac{-5}{x-5} \Rightarrow \left|\varphi'(x) = \frac{5}{(x-5)^2}\right| < 1,\ \forall x \in [1,2]$$

Ta có thể lấy x_0 = 6, 3, 1, 0, -1, ... bất kỳ. (không được 5)

Chú ý: trong phương pháp lạp, vẫn có ngoại lệ với $|\varphi'(x)| > 1$ ở những điểm đầu hay cuối của KCLN. Nghiã là điều kiện: $|\varphi'(x)| < 1$ đúng cho một khoảng lân cận chứa nghiệm chính xác ξ, còn điểm xuất phát x_0 chưa chắc thỏa: $|\varphi'(x_0)| < 1$

Thí dụ: Giải bằng phương pháp lạp:

$2x^3 - 18x^2 + 48x - 39 = 0$; $x_0 \in [1.3; 2]$, bằng phương lặp

Với khoảng cách li nghiệm: [a= 1.3, b= 2], và sai số là: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$

Ta lấy $x = \varphi(x) = \dfrac{1}{2x^2}(18x^2 - 48x + 39)$, với $x_0 = 1.3$,

mạc dù $\left|\varphi'(x) = \dfrac{3(8x-13)}{x^3}\right| > 1$, $x_0 = 1.3$, nhưng phép lạp vẫn hội tụ.

TT	xn	f(xn)
1	1.300000	2.076923
2	2.076923	1.965021
3	1.965021	1.836492
4	1.836492	1.713320
5	1.713320	1.635008
6	1.635008	1.615661
7	1.615661	1.615631
8	1.615631	1.615633
9	1.615633	1.615633

Nhưng nếu phát xuất với $x_0 = 1.1$ thì lại cho nghiệm khác: $\xi = 4.942239$!

Và $\varphi(x) = \dfrac{2x^3 + 48x - 39}{18x} \rightarrow x = 2.44212$, $x_0 = 2$, hôi tụ chậm!

5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

5.1. Nội dung phương pháp dây cung

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1). Nội dung của phương pháp dây cung là trên [a, b], thay cung cong của đường cong

$y = f(x)$ bằng dây cung trương cung cong ấy và xem hoành độ x_1 của giao điểm của dây cung với trục hoành là giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng ξ. Để xây dựng công thức tính x_1, ta xét hai trường hợp sau:

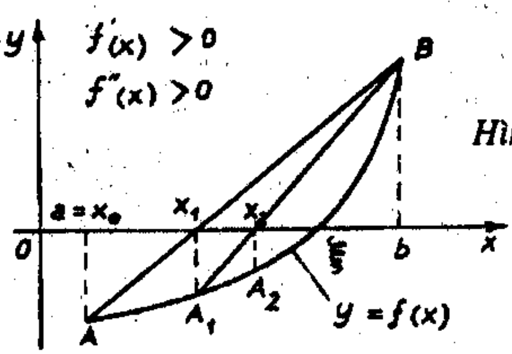
a. Trường hợp 1: $f'(x).f''(x) > 0$. Để xác định, xem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.4). Dây cung AB là đường thẳng đi qua hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ nên phương trình của dây cung AB là:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

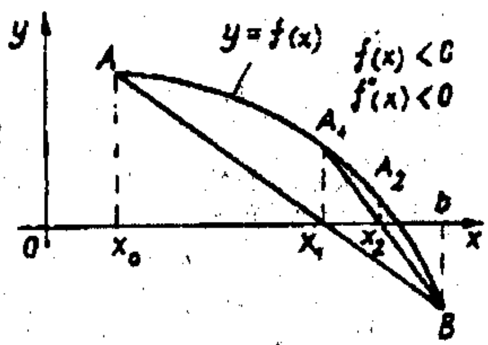
Để tìm hoành độ x_1 của giao điểm của dây cung AB với trục hoành, ta đặt trong phương trình trên $x = x_1$ và $y = 0$

$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)} \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$



Hình 2.4



Nghiệm ξ bây giờ nằm trong khoảng (x_1, b). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a, b) và lại áp dụng phương pháp dây cung đối với (x_1, b), ta nhận được x_2 xấp xỉ nghiệm ξ tốt hơn x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp tổng quát, ta nhận được:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - b)}{f(x_n) - f(b)}, \ x_0 = a \qquad (2.15)$$

Quá trình dừng lại khi ta nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xá yêu cầu.

Công thức (2.15) vẫn đúng trong trường hợp $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$ (hình 2.4).

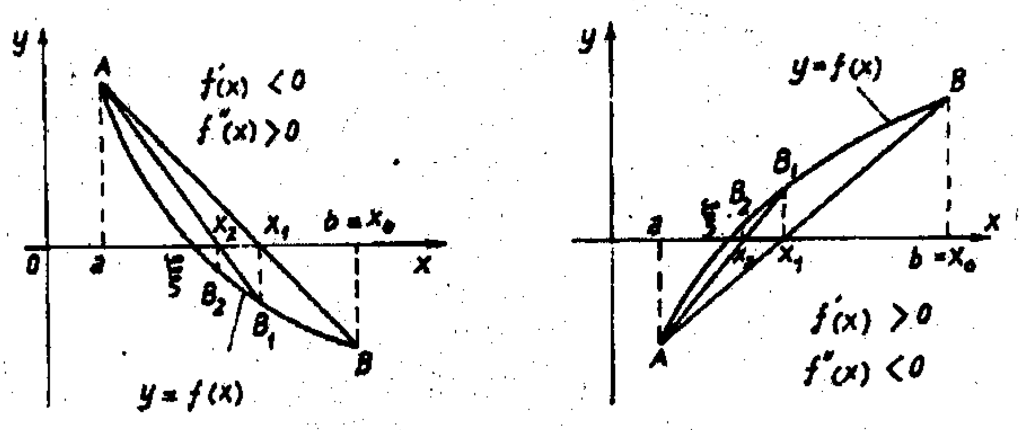
b. Trường hợp 2: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$. Để xác định, xem $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.5). Dây cung AB là đườn thẳng đi qua hai điểm A(a, f(a)) và B(b, f(b)) nên phương trình của dâ cung AB là:

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}$$

Để tìm hoành độ x_1 của giao điểm của dây cung AB với trục hoành, ta đạ trong phương trình trên $x = x_1$ và $y = 0$

$$\frac{-f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - b}{b - a}$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$



Hình 2.5

Nghiệm ξ bây giờ nằm trong khoảng (a, x_1). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xá yêu cầu, ta thay (a, b) bằng (a, x_1) và lại áp dụng phương pháp dây cun đối với (a, x_1), ta nhận được x_2 xấp xỉ nghiệm ξ tốt hơn x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}$$

Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp tổng quát, ta nhận được:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \qquad (2.16)$$

Quá trình dừng lại khi ta nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xác yêu cầu.

Công thức (2.16) vẫn đúng trong trường hợp $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$ (hình 2.5)

Từ những kết quả trên ta thấy rằng trong quá trình áp dụng liên tiếp phương pháp dây cung đối với khoảng cách ly nghiệm (a, b), có một trong hai mút của khoảng (a, b) cố định, đó là mút ở đó dấu của hàm $f(x)$ trùng với dấu của đạo hàm cấp hai $f''(x)$ và hai công thức (2.15) và (2.16) có thể kết hợp thành một công thức sau:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}}, \quad x_0 = b \qquad (2.17)$$

với n = 0, 1, 2...; và:

- d = b nếu $f(b)$ cùng dấu với $f''(x)$; $x_0 = a$; (*)
- d = a nếu $f(a)$ cùng dấu với $f''(x)$; $x_0 = b$; (**)

<u>Chú ý:</u> Trong cả 4 hình vẽ ta thấy dãy (x_n) luôn ở một bên với nghiệm ξ, cát tuyến đầu tiên cắt trục hoành luôn là x_1, vậy chọn x_0 phải là cùng phía với ξ và x_1, có x_0 ==> d là điểm biên còn lại.

Trong thực hành chỉ có 2 trường hợp (*) hoặc (**), nên nếu (*) không thành công thì ta đổi lại (**) chắc chắn sẽ thành công.

■ Ta xét một ví dụ so sánh sau: cho 2 phương trình sau với x_0:

(1) $x\sin x = 1;\ x \in [1,2],\ x_0 = 1$ (2) $tg(x+1) = x^2;\ x \in [0,1],\ x_0 = 0$

	xsinx-1=0	(1)			tan(x+1)-x^2	(2)
	x_i	$f(x_i)$	I		x_i	$f(x_i)$
	2	0.818595	I		1	-3.18504
	1	-0.15853	0		0	1.557408
tăng	1.16224	0.066583	1	tăng	0.328397	3.936469
giảm	1.107774	-0.00887	2	tăng	0.699631	-8.20838
tăng	1.114969	0.001128	3	tăng	1.190448	-2.81894
giảm	1.114053	-0.00014	4	tăng	2.656874	-6.49267
tăng	1.11417	1.85E-05	5	giảm	-0.59547	0.073565

giảm	1.114155	-2.4E-06	6	tăng	-0.55945	0.158471
tăng	1.114157	3.03E-07	7	giảm	-0.48554	0.329488
=	1.114157	-3.9E-08	8	giảm	-0.34627	0.646211

- (1) có dãy nghiệm tăng, giảm, <u>dù cuối cùng vẫn hội tụ</u> về **1.114157**
- (2) có dãy nghiệm tăng, giảm ngẫu nhiên, và không hội tụ.

Sau đây ta đổi cận: (1), $x_0 = 2$ và (2), $x_0 = 1$

	xsinx-1=0	(1)			tan(x+1)-x^2	(2)
	x_i	$f(x_i)$	i		x_i	$f(x_i)$
	1	-0.15853	0		0	1.557408
↓	2	0.818595	1	↓	1	-3.18504
↓	1.16224	0.066583	2	↓	0.328397	3.936469
↓	1.107774	-0.00887	3	↓	-0.21498	0.953029
↓	1.114969	0.001128	4	↓	-0.55397	0.171274
↓	1.114053	-0.00014	5	↓	-0.62243	0.00919
↓	1.11417	1.85E-05	6	↓	-0.62612	0.000308
↓	1.114155	-2.4E-06	7	↓	-0.62624	9.98E-06
↓	1.114157	3.03E-07	8	↓	-0.62625	3.23E-07
↓	1.114157	-3.9E-08	9	↓	-0.62625	1.05E-08

- (1) có dãy nghiệm giảm 2 --> **1.16224--> 1.107774 --> 1.114969....**
- (2) có dãy nghiệm giảm 1 --> **0.328397--> -0.21498 --> -0.55397....**
- Hai mô hình sau này mới đúng là đáp án theo lý thuyết

5.2. Sự hội tụ của phương pháp dây cung

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b) nghĩa là: $f(a)$, $f(b) < 0$, $f'(x)$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b). Khi đó từ mục 5.1 thấy rằng nếu áp dụng liên tiếp phương pháp dây cung đối với khoảng cách ly nghiệm (a, b) nghĩa là áp dụng công thức (2.17) với n = 0, 1, 2, ..., các gần đúng liên tiếp x_0, x_1, x_2,.... , hoặc tạo nên một dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n < x_{n+1} < \xi < b$$

(trường hợp 1), hoặc tạo nên một dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới:

$$a < \xi < ... < x_{n+1} < x_n < x_2 < x_1 < x_0 = b$$

(trường hợp 2), nên tồn tại giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\xi}$$

Dễ thấy rằng $\overline{\xi}$ là nghiệm của phương trình (2.1) trong (a, b), nghĩa là:

$$\overline{\xi} = \xi.$$

Thật vậy, chuyển qua giới hạn khi n → + ∞ trong (2.17), ta có:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})(\overline{\xi} - d)}{f(\overline{\xi}) - f(d)}$$

Từ đó suy ra $f(\overline{\xi}) = 0$. Vì (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) nên trong (a, b) chỉ chứa một nghiệm duy nhất ξ của phương trình (2.1), vậy $\overline{\xi} = \xi$.

5.3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Để đánh giá độ lệch của nghiệm gần đúng x_n, nhận được bằng phương pháp dây cung và nghiệm đúng ξ của phương trình (2.1), ta có định lý sau:

Định lý 2.3 Giả sử nghiệm đúng ξ và nghiệm gần đúng x_n của phương trình (2.1) đều nằm trên cùng một đoạn [α, β] và $0 < m_1 \le |f'(x)|, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Khi đó, ta có đánh giá sau:

$$\boxed{|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}} \qquad (2.18)$$

Chứng minh.

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange), ta có:

với e nằm giữa x_n và ξ, nghĩa là e ∈ (α, β).

Vì $f(\xi) = 0$ và $|f'(e)| \ge m_1$, nên:

$$|f(x_n) - f(\xi)| = |f(x_n)| = |f'(e)(x_n - \xi)| \ge m_1 |x_n - \xi|$$

và
$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} \qquad ■$$

Như vậy để đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng x_n, nhận được bằng phương pháp dây cung, ta có thể dùng (2.18).

Ngoài ra, ta có thể đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_n, nếu biết hai gần đúng liên tiếp x_{n-1} và x_n, nhận được từ (2.17) như sau:

Giả sử trên [a, b], $f'(x)$ liên tục, giữ dấu không đổi và thoả mãn:

$$\boxed{0 < m_1 \le |f'(x)| \le M_1 < +\infty} \quad (2.1$$

Từ (2.17) ta có:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - d)}{f(x_{n-1}) - f(d)}$$

và
$$0 - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(d)}{x_{n-1} - d}(x_n - x_{n-1})$$

Vì ξ là nghiệm đúng của phương trình (2.1): $f(\xi) = 0$, nên có thể viết:

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(d)}{x_{n-1} - d}(x_n - x_{n-1})$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta có:

$$f'(e_1)(\xi - x_{n-1}) = f'(e_2)(x_n - x_{n-1})$$

với e_1 nằm giữa ξ và x_{n-1}, nghĩa là $e_1 \in (a, b)$; e_2 nằm giữa x_{n-1} và d, nghĩa là $e_2 \in (a, b)$.

Do đó:

$$f'(e_1)(\xi - x_n + x_n - x_{n-1}) = f'(e_2)(x_n - x_{n-1})$$

$$f'(e_1)(\xi - x_n) = [f'(e_2) - f'(e_1)](x_n - x_{n-1})$$

và
$$|x_n - \xi| = \frac{|f'(e_2) - f'(e_1)|}{|f'(e_1)|}|x_n - x_{n-1}| \quad (2.20)$$

Theo giả thiết (2.19), ta có:

$$|f'(e_2) - f'(e_1)| \le M_1 - m_1$$

Từ (2.20) suy ra:

$$\boxed{|x_n - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|} \quad (2.21)$$

5.4. Ưu, nhược điểm của phương pháp dây cung

Phương pháp dây cung là một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi để tính gần đúng nghiệm thực của phương trình đại số và siêu việt. Ưu điểm của phương pháp dây cung là biết x_n, để tính x_{n+1}, ta chỉ phải tính một giá trị của hàm f tại điểm x_n (trừ trường hợp n = 0, ta phải tính hai giá trị của hàm f). Nhược điểm của phương pháp dây cung là tốc độ hội tụ chậm (chỉ hội tụ tuyến tính).

Thí dụ 2.6 Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$$

bằng phương pháp dây cung với độ chính xác 0,003, biết khoảng cách ly nghiệm là (1,1; 1,4).

Giải

Ta có: $f(1,1) = 0{,}331 < 0$ và $f(1,4) = 0{,}872 > 0$.

Ngoài ra: $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$; $f''(x) = 6x - 0{,}4$; $f'(x) > 0$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (1{,}1; 1{,}4)$.

Vậy có thể xuất phát từ khoảng (1,1; 1, 4) để áp dụng liên tiếp phương pháp dây cung và dãy các gần đúng liên tiếp $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ nhận được từ công thức (2.17) sẽ hội tụ đến nghiệm đúng nằm trong khoảng (1,1; 1,4) của phương trình đã cho.

Vì $f(1,4)$ cùng dấu với $f''(x)$ nên ta áp dụng công thức (2,17) với $d = 1{,}4$, $x_0 = 1{,}1$:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)(x_0 - 1{,}4)}{f(x_0) - f(1{,}4)} = 1{,}1 - \dfrac{f(1{,}1)(1{,}1 - 1{,}4)}{f(1{,}1) - f(1{,}4)} = \\ = 1{,}1 - \dfrac{(-0{,}331)(-0{,}3)}{-0{,}331 - 0{,}872} = 1{,}18254 \\ f(x_1) = f(1{,}18254) = -0{,}06252 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)(x_1 - 1{,}4)}{f(x_1) - f(1{,}4)} = \\ = 1{,}18254 - \dfrac{(-0{,}06252)(1{,}18254 - 1{,}4)}{-0{,}06252 - 0{,}872} = \\ = 1{,}18254 - \dfrac{(-0{,}06252)(-0{,}21746)}{-0{,}93452} = 1{,}19709 \\ f(x_2) = f(1{,}19709) = -0{,}01056 \end{cases}$$

Dừng lại tại x_2, ta có thể đánh giá độ lệch giữa x_2 và nghiệm đúng ξ của phương trình đã cho bằng (2.18). Vì $x_2 < \xi < 1{,}4$ nên $[x_2; 1{,}4]$ là đoạn chứa nghiệm gần đúng x_2 và nghiệm đúng ξ. Ta có:

$f'(x) \geq f'(x_2) = f'(1{,}19709) = 3{,}52618 = m_1$ với $\forall x \in [x_2, 1{,}4)$.

và $$|x_2 - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} = \frac{0.01056}{3.52618} = 0{,}00299 < 0{,}003$$

Vậy x_2 là nghiệm gần đúng phải tìm.

Nếu ta đánh giá độ chính xác của x_2 bằng (2.21), ta có:

$$m_1 = f'(1,1) = 2,99 \leq f'(x) \text{ với } \forall x \in [1,1; 1,4]$$

$f'(x) \leq f'(1,4) = 5,12 = M_1$ với $\forall x \in [1,1;1,4)$.

và:
$$|x_2 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_2 - x_1| = 0,01037$$

Từ đó suy ra, đánh giá (2.18) cho ta **kết quả tốt hơn.**

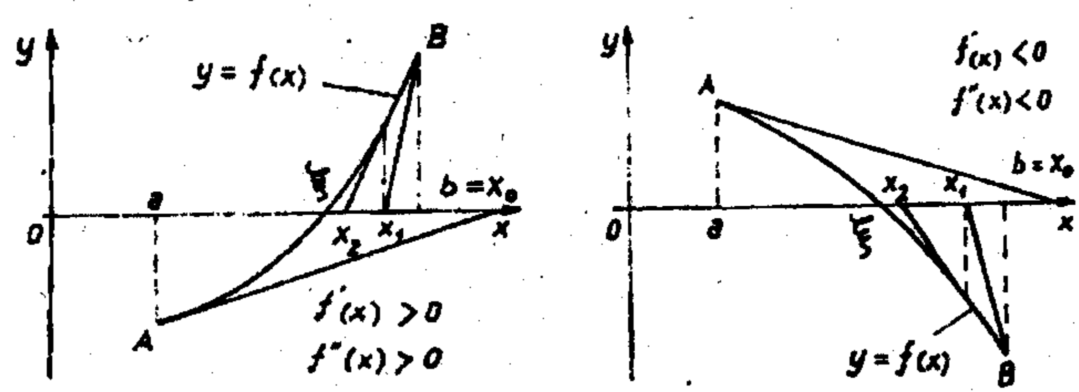
Chú ý rằng nghiệm đúng của phương trình đã cho là $\xi = 1,2$.

6. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN (PHƯƠNG PHÁP NEWTON)

6.1. Nội dung phương pháp Newton

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1). Nội dung của phương pháp tiếp tuyến là trên [a, b] thay cung cong AB của đường cong $y = f(x)$ tại điểm A hoạc tại điểm B và xem hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng ξ. Để xây dựng công thức tính x_i, ta xét hai trường hợp sau:

a. Trường hợp 1: $f'(x).\ f''(x) > 0$. Để xác định, xem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f(x) > 0$ và $f''(x) > 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.6) hoạc xem $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ và $f(x) < 0$ và $f''(x) < 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.6).



Hình 2.6

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm B (b, $f(b)$) có dạng:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

Để tìm hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành, ta đặt trong phương trình trên $x = x_1$ và $y = 0$:

$$-f(b) = f''(b)(x_1 - b)$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Nghiệm ξ bây giờ nằm trong khoảng (a, x_1). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a, b) bằng (a, x_1) và lại áp dụng phương pháp tiếp tuyến đối với (a, x_1), ta nhận được x_2 xấp xỉ nghiệm ξ tốt hơn x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp tổng quát ta nhận được:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Quá trình dừng lại khi ta nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xác yêu cầu.

b. Trường hợp 2: $f'(x).\ f''(x) < 0$. Để xác định, xem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.7) hoặc xem $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ và $f'(x) < 0$ và $f''(x) > 0$ với $\forall x \in (a, b)$ (hình 2.7). Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm A $(a, f(a))$ có dạng:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Để tìm hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành, ta đặt trong phương trình trên $x = x_1$ và $y = 0$:

$$-f(a) = f''(a)(x_1 - a)$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

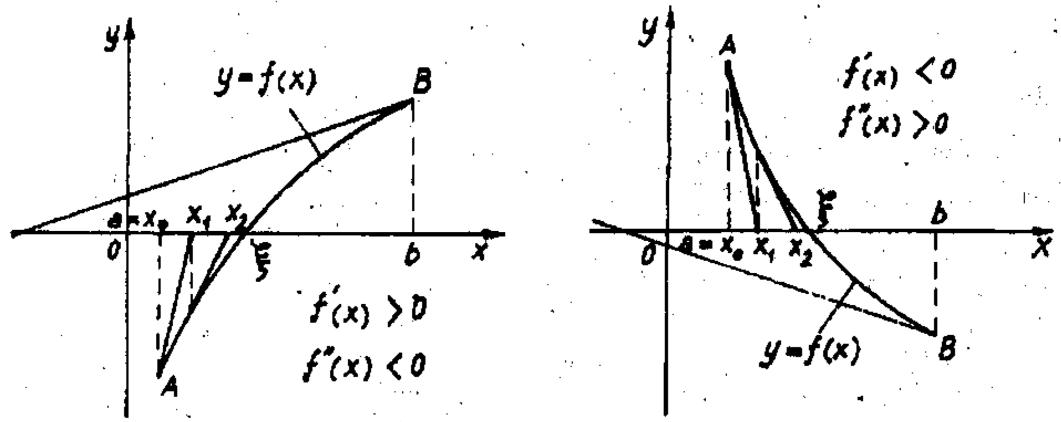
Nghiệm ξ bây giờ nằm trong khoảng (x_1, b). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a, b) bằng (x_1, b) và lại áp dụng phương pháp tiếp tuyến đối với (x_1, b) ta nhận được x_2 xấp xỉ nghiệm ξ tốt hơn x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp tổng quát ta nhận được:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Quá trình dừng lại khi ta nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xác yêu cầu.



Hình 2.7

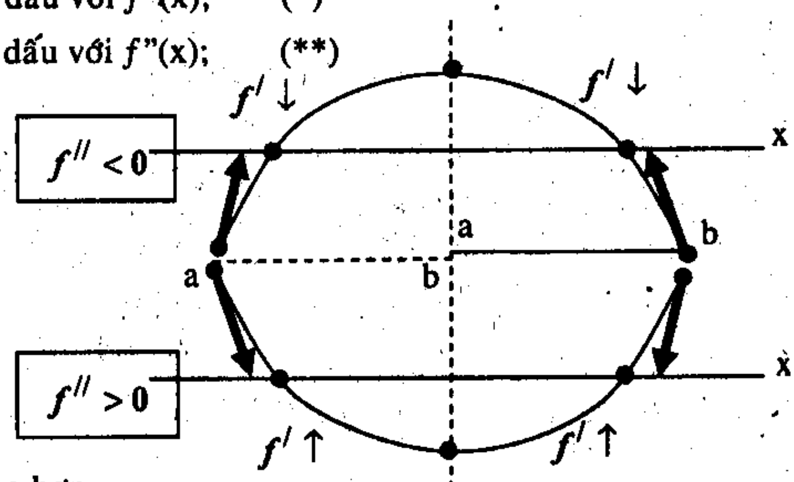
Chú ý ràng trong trường hợp 1 (hoạc trường hợp 2), nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến xuất phát từ x_0 = a (hoạc x_0 = b) thì ta sẽ nhận được x_1 nằm ngoài (a, b) (xem các hình 2.6 và 2.7), nghĩa là với sự lựa chọn x_0 mà $f(x_0)$ không cùng dấu với $f''(x)$, phương pháp tiếp tuyến có thể không dùng được.

Từ những kết quả trên, thấy rạng trong quá trình áp dụng liên tiếp phương pháp tiếp tuyến đối với khoảng cách ly nghiệm (a, b), ta sẽ có công thức sau:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{2.22}$$

với n = 0, 1, 2, ..., và:

- x_0 = b nếu f(b) cùng dấu với f''(x); (*)
- x_0 = a nếu f(a) cùng dấu với f''(x); (**)



Hình vẽ gợi đủ 4 trường hợp.

Chú ý: Trong cả 4 hình vẽ ta thấy dãy (x_n) luôn ở một bên với nghiệm, và tất cả dãy luôn ở phía mặt lồi ra. Hình vẽ gợi công thức.

Trong thực hành chỉ có 2 trường hợp (*) hoặc (**), nên nếu (*) không thành công thì ta đổi lại (**) chắc chắn sẽ thành công.

6.2. Sự hội tụ của phương pháp Newton

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b), nghĩa là $f(a).\ f(b) < 0$, $f'(x)$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b). Khi đó, từ mục 6.1 thấy rằng nếu áp dụng liên tiếp phương pháp tiếp tuyến đối với khoảng cách ly nghiệm (a, b), nghĩa lá áp dụng công thức (2.22) với n = 0, 1, 2,..., các gần đúng liên tiếp x_0, x_1, x_2,..... hoặc tạo nên một dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới:

$$a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < x_0 = b$$

(trường hợp 1), hoặc tạo nên một dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$$

(trường hợp 2), nên tồn tại giới hạn:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{\xi}$$

Dễ thấy rằng $\overline{\xi}$ là nghiệm của phương trình (2.1) trong (a, b), nghĩa là:

$$\overline{\xi} \equiv \xi.$$

Từ đó suy ra: $f(\overline{\xi}) = 0$. Vì (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) nên trong (a, b) chỉ chứa một nghiệm duy nhất ξ của phương trình (2.1), vậy $\overline{\xi} \equiv \xi$.

6.3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Để đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng x_n, nhận được bằng phương pháp tiếp tuyến, ta có thể dùng (2.18). Ngoài ra, ta có thể đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_n, nếu biết hai gần đúng liên tiếp x_{n-1} và x_n nhận được từ (2.22) như sau:

Giả sử trên [a, b], $f'(x)$ và $f''(x)$ thoả mãn:

$$0 < m_1 \le |f'(x)|; \quad |f''(x)| \le M_2 \qquad (2.23)$$

Áp dụng đánh giá (2.18), ta có:

$$\left|x_n - \xi\right| \le \left|\frac{f(x_n)}{m_1}\right| \qquad (2.24)$$

Dùng công thức khai triển Taylor của $f(x_n)$ tại x_{n-1}, nhận được:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(e)(x_n - x_{n-1})^2 \qquad (2.25)$$

trong đó e nằm giữa x_{n-1} và x_n, nghĩa là $e \in (a, b)$

Từ (2.22), ta có:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

và:

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

Thay vào (2.25), nhận được:

$$\left|f(x_n)\right| = \frac{1}{2}\left|f''(e)(x_n - x_{n-1})^2\right|$$

Từ điều kiện (2.23) và đánh giá (2.24), suy ra:

$$\left|x_n - \xi\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 \qquad (2.26)$$

So với đánh giá (2.21) của phương pháp dây cung, thấy rằng phương pháp tiếp tuyến hội tụ nhanh hơn phương pháp dây cung.

6.4. Ưu, nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến

Ưu điểm của phương pháp là tốc độ hội tụ nhanh. Nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến là biết x_n, để tính x_{n+1}, ta phải tính một giá trị của hàm và một giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_n.

Thí dụ 2.7 Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) \equiv x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$$

bằng phương pháp tiếp tuyến, biết khoảng cách ly nghiệm là (1,1; 1,4).

Giải.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 0,4x - 0,2; f''(x) \equiv 6x - 0,4 > 0$ với mọi $x \in (1,1; 1,4)$

Vì $f(1,4) = 0,872$ cùng dấu $f''(x) > 0$ nên trong công thức (2.22) ta chọn $x_0 = 1,4$. Ta có $f'(1,4) = 5,12$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,22969$$

$$f(x_1) = f(1,22969) = 0,11109$$

$$f'(x_1) = f'(1,22969) = 3,84454$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,20079$$

Dừng lại tại x_2 ta có thể đánh giá độ lệch giữa x_2 và nghiệm đúng ξ của phương trình đã cho bằng (2.26). Ta có:

$$f'(x) \geq f'(1,1) = 2,99 = m_1 \text{ với } \forall x \in [1,1;\ 1,4]$$

$$f''(x) \leq f''(1,4) = 8 = M_2 \text{ với } \forall x \in [1,1;\ 1,4]$$

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_2 - x_1|^2 \leq 0,00112 \qquad (2.27)$$

Ta cũng có thể đánh giá độ chính xác của x_2 bằng (2.18). Dễ thấy rằng $[1,1 ;\ 1,20079]$ chứa nghiệm đúng ξ và nghiệm gần đúng x_2. Ta có:

$$f'(x) \geq f'(1,1) = 2,99 = m_1 \text{ với } \forall x \in [1,1;\ 1,20079]$$

$$f(x_2) = f(1,20079) = 0,00288$$

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{0,00288}{2,99} = 0,00096$$

Như vậy đánh giá vừa nhận được tốt hơn so với đánh giá (2.27).

Nhận xét:

1. Những đánh giá (2.21) và (2.26) của phương pháp dây cung và tiếp tuyến thường quá trội so với thực tế. Do đó trong tính toán, để đánh giá sai số của nghiệm gần đúng, nhận được bằng phương pháp dây cung hoặc tiếp tuyến, người ta thường tìm cách thu hẹp đến mức tối đa đọan $[\alpha, \beta]$ chứa nghiệm gần đúng và nghiệm đúng, sau đó áp dụng đánh giá (2.18). Làm như vậy ta sẽ nhận được đánh giá tốt hơn, đồng thời khối lượng tính toán nhỏ hơn.
2. Các phương pháp dây cung và tiếp tuyến có thể xem là hai trường hợp đặc biệt của phương pháp lặp xét ở §4. Căn cứ vào các đánh giá (2.21) và (2.26) người ta thường nói phương pháp dây cung là phương pháp lạp có cấp hội tụ một, còn phương pháp tiếp tuyến là phương pháp lạp có cấp hội tụ hai.
3. Trong lý thuyết trên ta chọn $x_0 = b$ hay $x_0 = a$ là tùy thuộc dấu f'', nhưng một số bài toán ta có thể chọn cả hai mút đều cho ta hội tụ.

§7. GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NEWTON

Như đã biết ở §6, nội dung hình học của phương pháp Newton (còn gọi là phương pháp tiếp tuyến) là xuất phát từ nghiệm gần đúng thứ n: x_n, ta thay gần đúng phần đường cong có phương trình $y = f(x)$ giữa điểm $(x_n, f(x_n))$ và trục hoành bằng đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm $(x_n, f(x_n))$ có phương trình $y = f(x_n) + f''(x_n)(x - x_0)$ và xem hoành độ x_{n+1} của giao điểm của tiếp tuyến ấy với trục hoành là nghiệm gần đúng thứ n+1, tốt hơn x_n.

Thực chất của việc làm trên là xuất phát từ nghiệm gần đúng thứ n: x_n, ta xem $x = x_n + h_n$ là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$, nghĩa là

$$f(x) = f(x_n + h_n) = 0,$$

sau đó khai triển Taylo hàm số $f(x)$ tại điểm x_n, ta có:

$$f(x) = f(x_n) + h_n f'(x_n) + \frac{h_n^2}{2} f''(x_n) + \dots = 0$$

Bỏ qua những số hạng từ bậc hai trở đi đối với h_n, ta xem:

$$f(x) \approx f(x_n) + h_n . f''(x_0)$$

và:

$$f(x_n) + h_n . f'(x_n) \approx 0$$

$$h_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Do đó nghiệm gần đúng tốt hơn x_n là:

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cách làm trên đối với phương pháp Newton có thể mở rộng để giải gần đúng hệ thống phương trình phi tuyến. Để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp hai phương trình phi tuyến hai ẩn số:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

trong đó F và G là những hàm khả vi đến cấp cần thiết.

Giả sử x_n và y_n là nghiệm gần đúng thứ n của hệ thống phương trình phi tuyến (2.28). Xem:

$$x = x_n + h_n;\ y = y_n + k_n$$

ta có:

$$\begin{cases} F(x,y) = F(x_n + h_n; y_n + k_n) = 0 \\ G(x,y) = G(x_n + h_n; y_n + k_n) = 0 \end{cases}$$

Khai triển Taylo các hàm số hai biến số F(x, y) và G(x, y) tại điểm (x_n, y_n), ta có:

$$\begin{cases} F(x,y) = F(x_n,y_n) + h_n F'_x(x_n,y_n) + k_n F'_y(x_n,y_n) + \ldots = 0 \\ G(x,y) = G(x_n,y_n) + h_n G'_x(x_n,y_n) + k_n G'_x(x_n,y_n) + \ldots = 0 \end{cases}$$

Bỏ qua những số hạng từ bậc hai trở đi đối với h_n và k_n.

$$\begin{cases} F(x,y) \approx F(x_n,y_n) + h_n F'_x(x_n,y_n) + k_n F'_y(x_n,y_n) \\ G(x,y) \approx G(x_n,y_n) + h_n G'_x(x_n,y_n) + k_n G'_x(x_n,y_n) \end{cases}$$

và:
$$\begin{cases} h_n F'_x(x_n,y_n) + k_n F'_y(x_n,y_n) \approx -F(x_n,y_n) \\ h_n G'_x(x_n,y_n) + k_n G'_x(x_n,y_n) \approx -G(x_n,y_n) \end{cases}$$

Nếu định thức Jacobi:

$$J(x_n,y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

thì từ (2.29), ta nhận được:

$$h_n \approx -\frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

$$k_n \approx -\frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

Do đó, nghiệm gần đúng tốt hơn x_n, y_n là:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix} \qquad (2.30)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix}, n = 0,1,2,\ldots$$

trong đó x_0, y_0 là nghiệm gần đúng ban đầu, thường được xác định như sau: vẽ các đường cong F(x, y) = 0 và G(x, y) = 0 trên cùng hệ trục toạ độ Oxy và xem toạ độ giao điểm của chúng là x_0 và y_0.

Người ta chứng minh được rằng nếu nghiệm gần đúng ban đầu x_0 và y_0 "đủ gần" nghiệm đúng phải tìm của (2.28) thì x_{n+1}, y_{n+1} xác định bởi (2.30) sẽ hội tụ đến nghiệm đúng phải tìm khi $n \to +\infty$.

Trong tính toán cụ thể, quá trình lạp (2.30) sẽ được dừng lại khi ta nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xác yêu cầu.

Phương pháp Newton (2.30) hoàn toàn có thể mở rộng cho hệ thống n phương trình phi tuyến n ẩn số.

Thí du 2.8. Tìm nghiệm dương của hệ thống phương trình phi tuyến:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \qquad (2.31)$$

bàng phương pháp Newton

Giải

Vẽ đồ thị của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và của đường bậc ba $y = x^3$ trên giấy kẻ ô vuông và trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy, rồi xác định toạ độ của các giao điểm của chúng. Ta có thể chọn $x_0 = 0,9$ và

$y_0 = 0,5$ làm nghiệm gần đúng ban đầu để tìm nghiệm dương của hệ thống (2.31) bàng phương pháp Newton (hình (2.8)

Ta có:

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \\ G(x,y) = x^3 - y \end{cases}$$

$F'_x(x,y) = 2x;\ \ F'_y(x,y) = 2y$

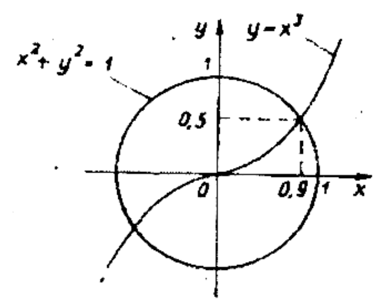
$G'_x(x,y) = 3x^2;\ \ G'_y(x,y) = -1$

$F(x_0,y_0) = 0,06;\ \ G(x_0,y_0) = 0,229$

$F'_x(x_0,y_0) = 1,8;\ \ F'_y(x_0,y_0) = 1$

$G'_x(x_0,y_0) = 2,43;\ \ G'_y = (x_0,y_0) = -1$

$$J(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 1,8 & 1 \\ 2,43 & -1 \end{vmatrix} = -4,23 \neq 0$$



Hình 2.8

Vậy
$$\begin{cases} x_1 = 0,9 - \dfrac{1}{-4,23}\begin{vmatrix} 0,06 & 1 \\ 0,229 & -1 \end{vmatrix} = 0,8316785 \\ y_1 = 0,5 - \dfrac{1}{-4,23}\begin{vmatrix} 1,8 & 0,06 \\ 2,43 & 0,229 \end{vmatrix} = 0,5629787 \end{cases}$$

Bây giờ ta tính x_2, y_2 bằng cách thay n = 1 trong (2.30). Ta có:

$$\begin{cases} F(x_1, y_1) = 0,0086341; \quad G(x_1, y_1) = 0,0122812; \\ F'_x(x_1, y_1) = 1,663357; \quad F'_y(x_1, y_1) = 1,1259574; \\ G'_x(x_1, y_1) = 2,0750673; \quad G'_x(x_1, y_1) = -1; \\ J(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} 1,663357 & 1,1259574 \\ 2,0750673 & -1 \end{vmatrix} = -3,9997943 \neq 0 \end{cases}$$

và:

$$\begin{cases} x_2 = 0,8316785 - \dfrac{1}{-3,9997943}\begin{vmatrix} 0,0086341 & 1,1259574 \\ 0,0122842 & -1 \end{vmatrix} = 0,8260619 \\ y_2 = 0,5629787 - \dfrac{1}{-3,9997943}\begin{vmatrix} 1,663357 & 0,0086341 \\ 2,0750673 & 0,0122842 \end{vmatrix} = 0,5636079 \end{cases}$$

Dừng lại ở bước lạp thứ hai, ta nhận được nghiệm gần đúng phải tìm là:

x = 0,8260619; y = 0,5636079

với F(x, y) = 0,000032; G(x, y) = 0,0000787, như bảng sau:

x	y	F	G	F'x	F'y	G'x	G'y	J
0.9	0.5	0.06	0.229	1.8	1	. 2.43	-1	-4.23
0.831678	0.56297872	0.0086341	0.01228423	1.66335697	1.12595745	2.075067317	-1	-3.99979
0.826062	0.56360791	3.194E-05	7.8535E-05	1.65212356	1.12721582	2.047134205	-1	-3.95969
0.826031	0.56362416	1.19E-09	2.2938E-09	1.65206272	1.12724832	2.046983416	-1	-3.95952
0.826031	0.56362416	0	0	1.65206272	1.12724832	2.046983411	-1	-3.95952

<u>Thí du 2.9</u>. Tìm nghiệm dương của hệ thống phương trình phi tuyến:

$$\begin{cases} F(x, y) = \cos(\pi x) - y^2 + 1.25 = 0 \\ G(x, y) = \sqrt{x} + \ln(1.5 + y) - 1 = 0 \end{cases}$$

bằng phương pháp Newton

Giải

Giải tương tự như trên ta có bảng kết quả sau: (Gài bằng excel)

x	y	F	G	F'x	F'y	G'x	G'y	J
0.5	0	1.25	0.112572	-3.1415926	0	0.70710	0.66666	-2.0944

0.8978	-0.590	-0.048125	-0.14771	-0.990614	1.1817622	0.52766	1.09996	-1.7132
0.9688	-0.490	0.0140385	-0.00638	-0.306673	0.9812998	0.50796	0.99073	-0.8023
0.9940	-0.497	0.0030678	-0.0001	-0.059075	0.9942011	0.50150	0.99710	-0.5575
0.9996	-0.4998	0.0001510	-7.8E-06	-0.003125	0.999698	0.50007	0.99984	-0.5030
0.9999	-0.5	4.693E-07	-2.4E-08	-9.732E-06	0.9999990	0.5	1	-0.5000
1	-0.5	4.5781E-12	-2.3E-13	-9.4940E-11	1	0.5	1	-0.5

Dừng lại ở bước lạp thứ sáu, ta nhận được nghiệm gần đúng phải tìm là:

$$x = 1; \quad y = -0{,}5$$

với $\quad F(x, y) = 4.5781E\text{-}12; \quad G(x, y) = -2.3E\text{-}13.$

BÀI TẬP

1. Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của các phương trình sau:
   a) $x^4 - 4x - 1 = 0$
   b) $\log_{10} x - 3x + 5 = 0$
   c) $x - \cos x = 0$
   d) $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$
2. Dùng phương pháp chia đôi, tìm nghiệm gần đúng của:
   a) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ với độ chính xác 10^{-3}, biết khoảng cách ly nghiệm là (-3; -2), (-2; -1)
   b) $x^2 \log_{0.5}(x+1) = 1$ với độ chính xác 10^{-2}, biết khoảng cách ly nghiệm là (-0,8; -0,5)
3. Dùng phương pháp lạp, tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-3}, của:
   a) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$, biết khoảng cách ly nghiệm là (-2,75; -2,5)
   b) $x - \cos x = 0$
   c) $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{x}$
4. Dùng phương pháp dây cung và tiếp tuyến, tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-2} của:
   a) $x^3 + 3x + 5 = 0$
   b) $x^4 + 3x + 1 = 0$
5. Dùng phương pháp dây cung, tìm các nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-5} của phương trình $\quad x - \cos^2 \pi x = 0$

6. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình: $2^x - 4x = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến với độ chính xác 10^{-3}.
7. Dùng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của hệ thống phương trình phi tuyến:

   a/ $x + 3\lg x - y^2 = 0$

   b/ $\boldsymbol{2x^2 - xy - 5x + 1 = 0}$

   cho biết $x_0 = 3,4$; $y_0 = 2,2$ (tính ba bước lạp)

Đáp số

1. a) (-1; 0) và (1; 2)

   b) (0; 0,5) và (1; 2)

   c) (0,6; 0,8)

   d) (0; 1), (2; 3) và (6; 7)
2. a) -2,532

   b) 0,73
3. a) -2,532

   b) 0,739

   c) 0,755
4. a) -1,155

   b) 0,33 và 1,30
5. 0,31152; 0,089492 và 1
6. 0,30990
7. $x_1 = 3,4899$; $y_1 = 2,2633$;

   $x_2 = 3,4891$; $y_2 = 2,2621$;

   $x_3 = 3,4875$; $y_3 = 2,2616$;

CHƯƠNG 3
GIẢI HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương này, ta xét việc giải hệ thống phương trình đại số tuyến tính n phương trình n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \qquad (3.1)$$

Trong đó a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ là những số đã biết, gọi là các hệ số của hệ thống phương trình (3.1); a_{in+1} $(i = \overline{1,n})$ cũng là những số đã biết, gọi là vế phải của hệ thống phương trình (3.1); x_i $(i = \overline{1,n})$ là các ẩn số phải tìm. Bằng cách ký hiệu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận hệ số của phương trình (3.1).

$$b = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} \text{ và } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gọi là véctơ vế phải và véctơ ẩn số của hệ thống phương trình (3.1). Hệ thống phương trình (3.1) có thể viết gọn dưới dạng:

$$Ax = b \qquad (3.2)$$

Nếu ma trận hệ số A không suy biến, nghĩa là:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì hệ thống phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất.

Thật vậy, vì $\det A \neq 0$ nên tồn tại một ma trận ngược A^{-1}. Nhân bên trái hai vế (3.2) với A^{-1}, nhận được:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \tag{3.3}$$

$$x = A^{-1}b$$

Rất rõ, (3.3) cho ta nghiệm của hệ thống phương trình (3.1) và nghiệm ấy là duy nhất. Ta đã biết phương pháp Cramer giải đúng hệ thống phương trình (3.1) bằng công thức:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i = \overline{1,n})}$$

trong đó $\Delta = detA$; Δ_i là định thức cấp n thu được bằng cách thay cột thứ i của Δ bằng cột vế phải b của hệ thống phương trình (3.1).

Như vậy, muốn giải hệ thống phương trình (3.1) bằng phương pháp Cramer, ta tính $n+1$ định thức cấp n. Người ta chứng minh được rằng, muốn tính một định thức cấp n cần $(n!)-1$ phép cộng và $(n-1)n!$ phép nhân. Điều đó chứng tỏ rằng khi n tăng, khối lượng tính bằng phương pháp Cramer tăng rất nhanh, đến mức không thể thực hiện được trong thực tế. Vì vậy, người ta phải xây dựng những phương pháp giải hệ thống phương trình (3.1) sao cho khi n lớn, khối lượng tính không quá lớn, có thể thực hiện được.

Những phương pháp giải hệ thống phương trình (3.1) được chia ra làm hai loại: những phương pháp trực tiếp và những phương pháp lặp.

Phương pháp trực tiếp là phương pháp cho ta nghiệm đúng của hệ thống phương trình (3.1) sau một số hữu hạn những phép tính sơ cấp (với giả thiết không có sai số làm tròn). Như vậy phương pháp Cramer là một phương pháp trực tiếp.

Đối với phương pháp lặp, ngược lại, nghiệm đúng x của hệ thống phương trình (3.1) là giới hạn của một dãy vô hạn $x^{(k)}$ những nghiệm gần đúng. Trong thực hành, ta bắt buộc phải dừng lại một k_0 cụ thể và xem $x^{(k_0)}$ là nghiệm gần đúng của hệ thống phương trình (3.1), do đó ta chỉ nhận được nghiệm gần đúng với một sai số có thể ước lượng được.

Việc chọn phương pháp thích hợp giải hệ thống phương trình (3.1), nói chung phụ thuộc vào đặc điểm của ma trận hệ số A. Chú ý rằng nếu các phần tử của ma trận hệ số A của hệ thống phương trình (3.1) đều khác 0 thì phải dùng n^2 ô nhớ để chưa các phần tử đó. Đây chính là hạn chế cần phải tính đến khi giải hệ thống phương trình (3.1) với n lớn trên máy tính. Chính vì vậy:

- Nếu ma trận hệ số A "đầy" nghĩa là số những phần tử bằng 0 ít và cấp của ma trận không quá lớn, người ta dùng phương pháp trực tiếp.

- Nếu ma trận hệ số A "thưa" nghĩa là số những phần tử khác 0 ít và thường phân bố ở lân cận đường chéo chính, và cấp của ma trận lớn, người ta thường dùng những phương pháp lạp. Những ma trận như vậy thường gạp khi giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng.

Cần lưu ý ràng việc lựa chọn vừa nêu chỉ có ý nghĩa "nói chung" không phải là một nguyên tác cứng nhác, không phải không có những trường hợp ngoại lệ

§2. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP: PHƯƠNG PHÁP GAUSS (HAY PHƯƠNG PHÁP KHỬ)

Phương pháp Gauss là một phương pháp được dùng phổ biến để giải hệ thống phương trình (3.1) khi ma trận hệ số A không có đạc điểm gì (trừ điều kiện không suy biến). Đạc biệt, người ta thường dùng phương pháp này khi hê số A "đầy".

2.1 Nội dung phương pháp

Để đơn giản việc trình bày, xét hệ thống 4 phương trình 4 ẩn số sau

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + a_{14}^{(0)}x_n = a_{15}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + a_{24}^{(0)}x_n = a_{25}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 + a_{34}^{(0)}x_n = a_{35}^{(0)} \\ a_{41}^{(0)}x_1 + a_{42}^{(0)}x_2 + a_{43}^{(0)}x_3 + a_{44}^{(0)}x_n = a_{45}^{(0)} \end{cases} \tag{3.4}$$

Nội dung cơ bản của phương pháp Gauss là khử dần các ẩn số để đưa hệ (3.4) về hệ "tam giác" tương đương (ma trận hệ số của hệ là ma trận tam giác trên)

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \\ \qquad\qquad x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = a_{45}^{(4)} \end{cases} \tag{3.5}$$

sau đó giải hệ (3.5) từ dưới lên trên.

Quá trình đưa hệ (3.4) về hệ (3.5) gọi là quá trình thuận, quá trình hệ (3.5) gọi là quá trình ngược.

a. Quá trình thuận:

Khử x_1. Giả sử $a_{11}^{(0)} \neq 0$ ($a_{11}^{(0)}$ gọi là trụ thứ nhất). Chia phương trình đầu của hệ (3.4) cho $a_{11}^{(0)}$, ta nhận được:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \tag{3.6}$$

với $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} / a_{11}^{(0)}$, $j = 2,3,4,5$.

Dùng phương trình (3.6) khử x_1 trong ba phương trình còn lại của hệ (3.4) trừ phương trình (3.6). Muốn thế, đem phương trình thứ hai của hệ (3.4) trừ phương trình (3.6) đã nhân với $a_{21}^{(0)}$; đem phương trình thứ ba của hệ (3.4) trừ phương trình (3.6) đã nhân với $a_{31}^{(0)}$; đem phương trình thứ tư của hệ (3.4) trừ phương trình (3.6) đã nhân với $a_{41}^{(0)}$. Kết quả nhận được hệ ba phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \tag{3.7}$$

với $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)}$, $i = 2,3,4; j = 2,3,4,5$.

Khử x_2. Giả sử $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ($a_{22}^{(1)}$ gọi là trụ thứ hai). Chia phương trình đầu của hệ (3.4) cho $a_{22}^{(1)}$, ta nhận được:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 = a_{25}^{(2)} \qquad (3.8)$$

với $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, $j = 3,4,5$.

Đem phương trình thứ hai của hệ (3.7) trừ phương trình (3.8) đã nhân với $a_{32}^{(1)}$; đem phương trình thứ ba của hệ (3.47) trừ phương trình (3.8) đã nhân với $a_{42}^{(1)}$. Kết quả nhận được hệ hai phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \qquad (3.9)$$

với $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(2)}$, $i = 3,4; j = 3,4,5$.

<u>*Khử*</u> x_3: Giả sử $a_{33}^{(2)} \neq 0$ ($a_{33}^{(2)}$ gọi là trụ thứ ba). Chia phương trình đầu của hệ (3.9) cho $a_{33}^{(2)}$ và đem phương trình thứ hai của hệ (3.9) trừ phương trình vừa nhận được đã nhân với $a_{43}^{(2)}$, ta được:

$$x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 = a_{35}^{(3)} \qquad (3.10)$$

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)} \qquad (3.11)$$

với $a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(1)} / a_{33}^{(3)}$, $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(3)} - a_{43}^{(2)} a_{3j}^{(3)}$; $j = 4,5$.

<u>Cuối cùng</u>, nếu $a_{44}^{(3)} \neq 0$ ($a_{44}^{(3)}$ gọi là trụ thứ tư), ta chia phương trình (3.11) cho $a_{44}^{(3)}$, phương trình (3.11) có dạng:

$$x_4 = a_{45}^{(4)} \qquad (3.12)$$

với $a_{45}^{(4)} = a_{45}^{(3)} / a_{44}^{(3)}$.

Rõ ràng là nếu các phần tử trụ $a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}$ và $a_{44}^{(3)}$ khác không thì hệ thống phương trình (3.4) tương đương với hệ thống phương trình "tam giác" sau:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \\ \qquad\qquad x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = a_{45}^{(4)} \end{cases} \tag{3.13}$$

b. Quá trình ngược. Giải hệ thống (3.13) từ dưới lên, ta có:

$$\begin{cases} x_4 = a_{45}^{(4)} \\ x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)}x_4 \\ x_2 = a_{25}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3 - a_{24}^{(2)}x_4 \\ x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3 - a_{14}^{(1)}x_4 \end{cases} \tag{3.14}$$

Chú ý ràng điều kiện để áp dụng phương pháp Gauss là các phần tử trụ phải khác 0.

2.2 Sơ đồ tính

Phân tích quá trình áp dụng phương pháp Gauss ở mục 2.1 ta thấy: để đưa hệ thống (3.4) về hệ thống "tam giác" tương đương (3.13), chỉ cần tính các hệ số $a_{1j}^{(1)}$, ($j = \overline{2,5}$), $a_{ij}^{(1)}$ ($i = \overline{2,4}$; $j = \overline{2,5}$), $a_{2j}^{(2)}$ ($j = \overline{3,5}$), $a_{ij}^{(2)}$ ($i = 3,4; j = \overline{3,5}$), $a_{3j}^{(3)}, a_{4j}^{(3)}$ ($j = 4,5$) và $a_{45}^{(4)}$. Kết quả tính, trong trường hợp không dùng máy tính điện tử, thường được ghi thành bảng, gọi là sơ đồ Gauss, trong đó cột $\sum$ dùng để kiểm tra quá trình tính.

2.3 Kiểm tra quá trình tính

Khi không dùng máy tính điện tử, để có thể kiểm tra từng bước quá trình tính của phương pháp Gauss, người ta dùng "tổng kiểm tra":

$$a_{i6}^{(0)} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}^{(0)},\ i = 1,2,3,4 \tag{3.15}$$

(nó chính là tổng những phần tử thuộc hàng i của ma trận hệ số A và số hạng vế phải tương ứng) như một vế phải mới của hệ thống phương trình (3.4) và xét hệ thống phương trình:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)} \overline{x}_j = a_{i6}^{(0)}, i = 1,2,3,4 \tag{3.16}$$

Rõ ràng là

$$\boxed{\overline{x}_j = x_j + 1,\ j = 1,2,3,4} \tag{3.17}$$

Thật vậy, thay (3.17) vào (3.16) do (3.4), ta nhận được:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)} \overline{x}_j = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)} (x_j + 1) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)} x_j + \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)}.1$$

$$= a_{i5}^{(0)} + \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(0)} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}^{(0)} = a_{i6}^{(0)}, i = 1,2,3,4$$

Vì đối với mỗi phần tử của cột $\sum$ ta đều thực hiện những phép tính giống như đối với những phần tử của những cột ở bên trái cột $\sum$ và nằm trong cùng một hàng với phần tử của cột $\sum$, nên nếu không có sai số tính toán thì những phần tử của cột $\sum$ phải bằng tổng những phần tử tương ứng của những phần tử tương ứng của những cột ở bên trái cột $\sum$. Hiện tượng này được dùng để kiểm tra quá trình thuận. Quá trình ngược được kiểm tra bằng hệ thức (3.17).

Sơ đồ Gauss

x_1	x_2	x_3	x_4	Số hạng tự do	$\sum$	Quá trình
$a_{11}^{(0)}$ $a_{21}^{(0)}$ $a_{31}^{(0)}$ $a_{41}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$ $a_{22}^{(0)}$ $a_{32}^{(0)}$ $a_{42}^{(0)}$	$a_{13}^{(0)}$ $a_{23}^{(0)}$ $a_{33}^{(0)}$ $a_{43}^{(0)}$	$a_{14}^{(0)}$ $a_{24}^{(0)}$ $a_{34}^{(0)}$ $a_{44}^{(0)}$	$a_{15}^{(0)}$ $a_{25}^{(0)}$ $a_{35}^{(0)}$ $a_{45}^{(0)}$	$a_{16}^{(0)}$ $a_{26}^{(0)}$ $a_{36}^{(0)}$ $a_{46}^{(0)}$	Quá trình thuận
1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$	
	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$ $a_{45}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$	
	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(2)}$	
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	

		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	
		1	$a_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(3)}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	
			1	$a_{45}^{(4)}$	$a_{46}^{(4)}$	
			1	x_4	$\bar{x}_4$	Quá trình ngược
		1		x_3	$\bar{x}_3$	
	1			x_2	$\bar{x}_2$	
1				x_1	$\bar{x}_1$	

Nếu khi tính toán có sai số làm tròn thì bắt đầu từ hàng thứ 5 trở đi (trong sơ đồ Gauss) phần tử ở cột $\sum$ và tổng những phần tử cùng hàng và ở bên trái nó được phép lệch nhau trong phạm vi giới hạn của sai số làm tròn đã phạm phải. Một sự chênh lệch lớn chứng tỏ đã có nhầm lẫn trong quá trình tính toán.

Nhận xét

1. Sơ đồ Gauss nêu trên hoàn toàn có thể mở rộng cho hệ thống n phương trình n ẩn số.

2. Nếu ma trận hệ số A của hệ thống phương trình xuất phát đối xứng, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$, thì căn cứ vào các công thức (3.6), (3.8) và (3.9) dễ dàng thấy rằng $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)} = a_{ji}^{(2)}$, nghĩa là những ma trận trung gian

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{pmatrix}$$

cũng đối xứng. Do đặc điểm này, trong sơ đồ Gauss, ta chỉ cần tính $a_{ij}^{(1)}$ và $a_{ij}^{(2)}$ với $j \geq i$, vì vậy khối lượng tính toán sẽ giảm đi gần một nửa.

2.4 Khối lượng tính

Xét hệ thống n phương trình n ẩn số. Căn cứ vào những công thức tính của phương pháp Gauss, ta đếm được số các phép tính cộng, trừ, nhân và chia S_n cần phải thực hiện gồm (không kể các phép tính đối với các phần tử của cột kiểm tra $\sum$):

$\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ phép nhân

$\frac{n(n+1)}{2}$ phép chia

$\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ phép cộng hoặc trừ

Vậy: $S_n = \frac{4n^3+9n^2-7n}{6}$ phép tính.

Chẳng hạn khi $n=5$, $S_5=115$ phép tính; khi $n=10$, $S_{10}=805$ phép tính; khi $n=100$, $s_{100}=681550$ phép tính. So với phương pháp Cramer, phương pháp Gauss đòi hỏi ít phép tính hơn nhiều, nhất là khi n phải lớn. Chính vì vậy, phương pháp Gauss là một phương pháp rất phổ biến và rất hiệu quả để giải hệ thống phương trình (3.1). Việc áp dụng phương pháp Gauss càng có lợi khi cần giải đồng thời nhiều hệ thống phương trình đại số tuyến tính có cùng ma trận hệ số, chỉ khác nhau ở vế phải.

Nếu ma trận hệ số của hệ thống phương trình đối xứng thì số các phép tính cộng, trừ, nhân và chia S_n cần phải thực hiện gồm (không kể các phép tính đối với các phần tử của cột kiểm tra $\sum$):

$\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ phép nhân

$\frac{n(n+1)}{2}$ phép chia

$\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ phép cộng hoặc trừ

Vậy: $S_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ phép tính, nghĩa là giảm hơn một nửa so với trường hợp ma trận hệ số A không đối xứng.

2.5 Sai số của phương pháp Gauss.

Nếu các phép tính cộng, trừ, nhân và chia làm đúng hoàn toàn và không phải làm tròn thì phương pháp Gauss cho ta nghiệm đúng của hệ thống phương trình (3.1). Vì vậy, phương pháp Gauss là một phương pháp đúng. Tuy nhiên, trong tính toán, không tránh khỏi sai số làm tròn, cho nên trong thực tế, dùng phương pháp Gauss ta cũng chỉ nhận được nghiệm gần đúng.

Thí du 3.1 Dùng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình tuyến tính Ax=b sau:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -0.1 & 1\\ 0.4 & 0.5 & 4 & -8.5\\ 0.3 & -1 & 1 & 5.2\\ 1 & 0.2 & 2.5 & -1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2.7\\ 21.9\\ -3.9\\ 9.9\end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

Giải:

TT	x_1	x_2	x_3	x_4	So hang tu do	Σ	Qua Trinh
1	2	1	-0.1	1	2.7	6.6	
2	0.4	0.5	4	-8.5	21.9	18.3	
3	0.3	-1	1	5.2	-3.9	1.6	
4	1	0.2	2.5	-1	9.9	12.6	
5	1	0.5	-0.05	0.5	1.35	[illegible]	Quá trình thuận
6	0	0.3	4.02	-8.7	21.36	[illegible]	
7	0	-1.15	1.015	5.05	-4.305	[illegible]	
8	0	-0.3	2.55	-1.5	8.55	[illegible]	
9		1	13.4	-29	71.2	[illegible]	
10		0	16.425	-28.3	77.575	[illegible]	
11		0	6.57	-10.2	29.91	26.28	
12			1	-1.722983	4.722983	[illegible]	
13			0	1.12	-1.12	[illegible]	
14				1	-1	[illegible]	
15				1	-1	[illegible]	Quá trình ngược
16			1		3	[illegible]	
17		1			2	[illegible]	
18	1				1	[illegible]	

Nghiệm là: $x_1=1,\ x_2=2, x_3=3, x_4=-1$.

Chú ý:

1. Ở cột Σ, lúc đầu, ta gài công thức là tổng của tất cả các cột ở bên trái nó, và từ hàng thứ 5 trở đi, các kết quả của cột này, ta phó mă65c cho thuật toán Gauss, nhưng để kiểm tra, thì chúng vẫn là tổng của tất cả các cột ở bên trái nó. Nếu không đúng điều này thì thuật toán bị nhầm lẫn chỗ nào rồi!
2. Nếu đơn giản ta, ta không cần làm cột Σ.
3. Cách Gài công thức:

- A5: A2/\$A\$2, sau đó kéo A5->E5

A6: -$A2*A$5+A2, sau đó kéo A6->E6,
sau đó kéo cả hàng xuống A6-E6 --> A7-E7, --> A8-E8
Chú ý cố định cột A: **$A2**, cố định hàng 5: **A$5,** làm hết 1 chu kỳ.
Các chu kỳ khác làm tương tự.

TT	A	B	C	D	E
1	2	1	-0.1	1	2.7
2	0.4	0.5	4	-8.5	21.9
3	0.3	-1	1	5.2	-3.9
4	1	0.2	2.5	-1	9.9
5	1	0.5	-0.05	0.5	1.35
6	0	0.3	4.02	-8.7	21.36
7	0	-1.15	1.015	5.05	-4.305
8	0	-0.3	2.55	-1.5	8.55
9	1	0.5	-0.05	0.5	1.35
10	0	1	13.4	-29	71.2
11	0	0	16.425	-28.3	77.575
12	0	0	6.57	-10.2	29.91
.	1	0.5	-0.05	0.5	1.35
.	0	1	13.4	-29	71.2
.	0	0	1	-1.722983	4.722983
.	0	0	0	1.12	-1.12
	1	0.5	-0.05	0.5	1.35
	0	1	13.4	-29	71.2
	0	0	1	-1.722983	4.722983
	0	0	0	1	-1
				1	-1
			1		3
		1			2
	1				1

Thí du 3.2 Dùng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình tuyến tính Ax=b sau:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1 & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1 & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{bmatrix} \qquad (3.19)$$

Giải:

Chú ý ràng ma trận hệ số A của hệ (3.19) đối xứng, nên các ma trận trung gian $A^{(1)}, A^{(2)}$ cũng đối xứng (xem lại nhận xét 2, và các ô đánh màu ở dưới) và ta chỉ cần tính những phần tử nằm ngay trên đường chéo chính của các ma trận $A^{(1)}, A^{(2)}$. kết quả tính toán được ghi trong bảng sau:

x_1	x_2	x_3	x_4	So hang tu do	Σ	Qua Trinh
1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92	Quá trình thuận
0.42	1	0.32	0.44	0.5	2.68	
0.54	0.32	1	0.22	0.7	2.78	
0.66	0.44	0.22	1	0.9	3.22	
1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92	
0	0.8236	0.0932	0.1628	0.374	1.4536	
0	0.0932	0.7084	-0.1364	0.538	1.2032	
0	0.1628	-0.1364	0.5644	0.702	1.2928	
1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92	
0	1	0.113162	0.197669	0.454104	1.764934	
0	0	0.697853	-0.15482	0.495678	1.038708	
0	0	-0.15482	0.53222	0.628072	1.005469	
1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92	
0	1	0.113162	0.197669	0.454104	1.764934	
0	0	1	-0.22186	0.710289	1.488433	
0	0	0	0.497871	0.738041	1.235912	
1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92	
0	1	0.113162	0.197669	0.454104	1.764934	
0	0	1	-0.22186	0.710289	1.488433	
0	0	0	1	1.482393	2.482393	
			1	1.482393	2.482393	Quá trình ngược
		1		1.039166	2.039166	
	1			0.043487	1.043487	
1				-1.25779	-0.25779	

Và nghiệm là: x_1=-1.25779, x_2=0.043487, x_3=1.039166, x_4 =1.482393.

2.6 Phương pháp Gauss có tìm trụ lớn nhất.

Quá trình Gauss trình bày ở mục 2.1 sẽ không thực hiện được nếu một trong các trụ $a_{11}^{(0)}$, $a_{11}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $a_{44}^{(3)}$ bằng không, dù hệ thống phương trình có nghiệm duy nhất. Ngoài ra, nếu định thức của hệ thống phương trình khác không, nhưng nếu một vài phần tử trụ về trị tuyệt đối rất nhỏ hơn so với những phần tử còn lại trong cùng hàng thì khi chia các phần tử ấy cho phần tử trụ, sai số sẽ làm tròn, do đó có thể làm giảm nhiều độ chính xác của nghiệm tìm được.

Để khắc phục những hạn chế vừa nêu, người ta thường dùng phương pháp Gauss có tìm trụ lớn nhất. Nội dung của phương pháp này như sau:

Khi khử x_1 trong sơ đồ Gauss, người ta chọn số lớn nhất về trị tuyệt đối trong các số $a_{11}^{(0)}$, $a_{21}^{(0)}$, $a_{31}^{(0)}$, $a_{41}^{(0)}$ làm trụ thứ nhất và gọi là trụ lớn nhất thứ nhất. Sau đó ta hoán vị hàng chứa trụ lớn nhất thứ nhất với hàng thứ nhất để trụ lớn nhất nằm ở hàng 1 cột 1 của sơ đồ Gauss (nghĩa là ở hàng 1 cột 1 của ma trận hệ số A), và quá trình khử x_1 được tiến hành như ở mục 2.1a.

Khi khử x_2 trong sơ đồ Gauss, người ta chọn số lớn nhất về trị tuyệt đối trong các số $a_{22}^{(1)}$, $a_{32}^{(1)}$, $a_{42}^{(1)}$ làm trụ thứ hai và gọi là trụ lớn nhất thứ hai. Sau đó ta hoán vị hàng chứa trụ lớn nhất thứ hai với hàng chứa phần tử $a_{22}^{(1)}$ để trụ lớn nhất thứ hai nằm đúng ở hàng 6 cột 2 của sơ đồ Gauss (nghĩa là ở hàng 1 cột 1 của ma trận trung gian $A^{(1)}$), và quá trình khử x_2 được tiến hành như ở mục 2.1a.

Khi khử x_3 trong sơ đồ Gauss, người ta chọn số lớn nhất về trị tuyệt đối trong các số $a_{33}^{(2)}$, $a_{43}^{(2)}$ làm trụ thứ ba và gọi là trụ lớn nhất thứ ba. Sau đó ta hoán vị hàng chứa trụ lớn nhất thứ ba với hàng chứa phần tử $a_{33}^{(2)}$ để trụ lớn nhất thứ ba nằm đúng ở hàng 10 cột 3 của sơ đồ Gauss (nghĩa là ở hàng 1 cột 1 của ma trận trung gian $A^{(2)}$), và quá trình khử x_3 được tiến hành như ở mục 2.1a.

Chú ý rằng sơ đồ Gauss có tìm trụ lớn nhất nêu trên hoàn toàn có thể áp dụng cho hệ thống n phương trình n ẩn.

Thí dụ 3.3 Dùng phương pháp Gauss, **tìm trụ lớn nhất** để giải các hệ phương trình tuyến tính Ax=b sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

Giải

Quá trình thuận:

Viết các hệ số $a_{ij}^{(0)}$, $i = 1,2,3,4;$ $j = 1,2,3,4,5$ của hệ thống phương trình (3.20) vào 4 hàng đầu và 5 cột đầu của bảng sau. Cột $\sum$ là tổng của 5 cột bên trái nó.

Vì $a_{ii}^{(0)}$=2 là số lớn nhất về trị tuyệt đối trong các số 2, 1, 1, 1 nên trụ lớn nhất là 2, nó đã ở đúng hàng 1 cột 1 của bảng. Tiến hành khử x_1, ta nhận được kết quả ghi ở các hàng 5, 6, 7, 8 của bảng.

So sánh các số 1, -2, -2, về trị tuyệt đối, ta thấy rằng có thể chọn $a_{32}^{(1)}$ = -2 hoặc $a_{42}^{(1)}$ = -2 làm trụ lớn nhất thứ hai. Chẳng hạn, ta chọn $a_{32}^{(1)}$ làm trụ lớn nhất thứ hai, khi đó ta phải hoán vị hàng 7 với hàng 6 của bảng. Kết quả ghi ở các hàng $\left(6'\right),\left(7'\right),\left(8'\right)$ của bảng. Tiến hành khử x_2, ta nhận được kết quả ghi ở các hàng 14, 15, 16 của bảng.

Vì $a_{33}^{(2)}$ = 1.5 là số lớn nhất về trị tuyệt đối trong các số 1.5 và -1, nên trụ lớn nhất thứ 3 là 1.5, nó đã ở đúng hàng thứ 15 của bảng. Tiến hành khử x_3, ta nhận được kết quả ghi ở các hàng 19, 20 của bảng.

x_1	x_2	x_3	x_4	So hang tu do		tt
2	6	2	8	16		1
1	4	2	2	5		2
1	1	2	4	9		3
1	1	1	1	2		4
1	3	1	4	8		5
0	1	1	-2	-3		6
0	-2	1	0	1		7
0	-2	0	-3	-6		8
1	3	1	4	8		9
0	-2	1	0	1	$\left(6'\right)$	10
0	1	1	-2	-3	$\left(7'\right)$	11
0	-2	0	-3	-6	$\left(8'\right)$	12
1	3	1	4	8		13
0	1	-0.5	0	-0.5		14
0	0	1.5	-2	-2.5		15

0	0	-1	-3	-7		16
1	3	1	4	8		17
0	1	-0.5	0	-0.5		18
0	0	1	-1.33333	-1.666666667		19
0	0	0	-4.33333	-8.666666667		20
1	3	1	4	8		21
0	1	-0.5	0	-0.5		22
0	0	1	-1.33333	-1.666666667		23
0	0	0	1	2		24
			1	2	x_4	25
		1		1	x_3	26
	1			0	x_2	27
1				-1	x_1	28

Quá trình ngược: Ta có:

$$x_4 = a_{45}^{(4)} = 2, \qquad \overline{x_4} = a_{46}^{(4)} = 3 = x_4 + 1$$

$$x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} x_4 = -\frac{5}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \times 2 = 1.$$

$$\overline{x_3} = a_{36}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \overline{x_4} = -2 - \left(-\frac{4}{3}\right) \times 3 = 2 = x_3 + 1$$

$$x_2 = a_{25}^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 - a_{24}^{(2)} x_4 = -0.5 - (-0.5) \times 1 = 0.$$

$$\overline{x_2} = a_{26}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \overline{x_3} - a_{24}^{(2)} \overline{x_4} = 0 - (-0.5) \times 2 = 1 = x_2 + 1.$$

$$x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 - a_{14}^{(1)} x_4 = 8 - 3 \times 0 - 1 \times 1 - 4 \times 2 = -1.$$

$$\overline{x_1} = a_{16}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 - a_{14}^{(1)} x_4 = 17 - 3 \times 1 - 1 \times 2 - 4 \times 3 = x_1 + 1.$$

Từ bảng trên ta nhận được nghiệm của hệ thống (3.20) là:

$x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

2.7 Tính định thức bằng phương pháp Gauss

Để tính định thức

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

ta áp dụng quá trình thuận của sơ đồ Gauss trong đó không có cột số hạng tự do. Kết quả ta nhận được ma trận tam giác:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Những phần tử của ma trận tam giác B lần lượt nhận được từ những phần tử của ma trận A và của những ma trận trung gian $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ bằng những phép biến đổi sơ cấp sau:

a. Chia các hàng đầu của ma trận A và của những ma trận trung gian $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ (ma trận $A^{(3)}$ chỉ gồm một phần tử $a_{44}^{(3)}$) cho các trụ khác không $a_{11}^{(0)}$ $(a_{11}^{(0)} = a_{11})$, $a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, a_{44}^{(3)}$. Khi đó định thức của ma trận A cũng phải chia cho các trụ trên.

b. Trừ khỏi các hàng của ma trận A và của những ma trận trung gian $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ các hàng đầu đều nhận được từ phép biến đổi a của những ma trận ấy đã nhân với một số. Khi đó định thức của ma trận A không thay đổi giá trị. Vậy ta có:

$$\det(B) = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1 = \det(A) \Big/ a_{11}^{(0)}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdot a_{44}^{(3)}$$

từ đó

$$\det(A) = a_{11}^{(0)}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdot a_{44}^{(3)} \qquad (3.21)$$

Nếu ta áp dụng quá trình thuận của sơ đồ Gauss có tìm trụ lớn nhất, thì mỗi lần hoán vị hai hàng với nhau, ta đã là đổi dấu định thức của ma trận A do đó:

$$\det(A) = (-1)^p a_{11}^{(0)}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdot a_{44}^{(3)} \qquad (3.22)$$

trong đó $a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}$ là các trụ lớn nhất thứ nhất, thứ hai, thứ ba, p là số lần hoán vị hai hàng.

Nhận xét:

1. Những công thức (3.21), (3.22) hoàn toàn có thể mở rộng để tính định thức cấp n của ma trận vuông cấp n.

2. So với cách tính định thức bằng phương pháp Laplaxơ, phương pháp Gauss đòi hỏi ít phép toán hơn nhiều, nhất là khi n lớn.

3. Khi áp dụng phương pháp Gauss giải hệ phương trình $Ax = b$, ta có thể nhận được đồng thời nghiệm và định thức của ma trận hệ số A của hệ thống phương trình.

Thí du 3.4 Dùng phương pháp Gauss, tính định thức A, sau đó giải các hệ phương trình tuyến tính Ax=b sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} 7.4 & 2.2 & -3.1 & 0.7 \\ 1.6 & 4.8 & -8.5 & 4.5 \\ 4.7 & 7 & -6 & 6.6 \\ 5.9 & 2.7 & 4.9 & -5.3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 17.3 \\ 23.7 \\ 24.1 \\ 6.8 \end{bmatrix}$$

Giải:

Kết quả tính toán được ghi trong bảng sau.

$\Delta = 7.4 \times 4.32432 \times 6.11332 \times (-7.58387) = -1483.6024$

x_1	x_2	x_3	x_4	So hang tu do	
7.4	2.2	-3.1	0.7	17.3	
1.6	4.8	-8.5	4.5	23.7	
4.7	7	-6	6.6	24.1	
5.9	2.7	4.9	-5.3	6.8	
1	0.297297	-0.41892	0.094595	2.337838	
0	4.324324	-7.82973	4.348649	19.95946	
0	5.602703	-4.03108	6.155405	13.11216	
0	0.945946	7.371622	-5.85811	-6.99324	
1	0.297297	-0.41892	0.094595	2.337838	
0	1	-1.81063	1.005625	4.615625	
0	0	6.113313	0.521188	-12.7478	
0	0	9.084375	-6.80938	-11.3594	
1	0.297297	-0.41892	0.094595	2.337838	
0	1	-1.81063	1.005625	4.615625	
0	0	1	0.085255	-2.08525	
0	0	0	-7.58386	7.583859	
1	0.297297	-0.41892	0.094595	2.337838	
0	1	-1.81063	1.005625	4.615625	
0	0	1	0.085255	-2.08525	
0	0	0	1	-1	
			1	-1	x_4

		1		-2	x_3
	1			2	x_2
1				1	x_1

2.8 Tính ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss

Cho ma trận không suy biến cấp 4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Để tính ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

của ma trận A, ta dựa vào định nghĩa của ma trận nghịch đảo:

$$AA^{-1} = E$$

hay

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra 4 hệ thống phương trình sau:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bốn hệ thống phương trình trên có chung ma trận hệ số A, chỉ khác nhau ở vế phải. Do đó, có thể dùng phương pháp Gauss giải đồng thời 4 hệ thống phương trình và viết kết quả tính toán vào một bảng chung.

Nhận xét

1. Phương pháp nêu trên hoàn toàn có thể mở rộng để tính ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp n không suy biến.

2. So với cách tính ma trận nghịch đảo bằng định thức, phương pháp nêu trên đòi hỏi ít phép tính hơn nhiều, nhất là khi n lớn.

Thí dụ 3.5 Dùng phương pháp Gauss, tính A^{-1}, biết

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải

Trong bảng này ta viết 4 cột của ma trận A, 4 cột số hạng tự do của 4 hệ thống phương trình phải giải và cột kiểm tra Σ, sau đó quá trình tính toán hoàn toàn giống thí dụ 3.1.

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	j=1	j=2	j=3	j=4	Σ	Qua trình
1	0	1	2	1	0	0	0		Quá trình thuận
-1	2	3	1	0	1	0	0		
4	0	-2	1	0	0	1	0		
0	2	1	2	0	0	0	1		
1	0	1	2	1	0	0	0	5	
0	2	4	3	1	1	0	0	11	
0	0	-6	-7	-4	0	1	0	-16	
0	2	1	2	0	0	0	1	6	
1	0	1	2	1	0	0	0	5	
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0	5 1/2	
0	0	-6	-7	-4	0	1	0	-16	
0	0	-3	-1	-1	-1	0	1	-5	
1	0	1	2	1	0	0	0	5	
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0	5 1/2	
0	0	1	1 1/6	2/3	0	- 1/6	0	2 2/3	
0	0	0	2 1/2	1	-1	- 1/2	1	3	
1	0	1	2	1	0	0	0	5	
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0	5 1/2	
0	0	1	1 1/6	2/3	0	- 1/6	0	2 2/3	
0	0	0	1	2/5	- 2/5	- 1/5	2/5	1 1/5	

			1	2/5	- 2/5	- 1/5	2/5	1 1/5	nh
		1		1/5	7/15	1/15	- 7/15	1 1/4	

	1			- 1/2	1/6	1/6	1/3	1 1/6	
1				0	1/3	1/3	- 1/3	1 1/3	

Ma nghịch đảo là đếm ngược thứ tự trở lên của 4 hàng cuối cùng:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/5 & 7/15 & 1/15 & -7/15 \\ 2/5 & -2/5 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Nếu ở giai đoạn cuối ta xử lý ngược, nghiã là để các số 1 ở 2 giai đoạn cuối song song nhau

1	0	1	2	1	0	0	0
-1	2	3	1	0	1	0	0
4	0	-2	1	0	0	1	0
0	2	1	2	0	0	0	1
1	0	1	2	1	0	0	0
0	2	4	3	1	1	0	0
0	0	-6	-7	-4	0	1	0
0	2	1	2	0	0	0	1
1	0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0
0	0	-6	-7	-4	0	1	0
0	0	-3	-1	-1	-1	0	1
1	0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0
0	0	1	1 1/6	2/3	0	- 1/6	0
0	0	0	2 1/2	1	-1	- 1/2	1
1	0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	1 1/2	1/2	1/2	0	0
0	0	1	1 1/6	2/3	0	- 1/6	0
0	0	0	1	2/5	- 2/5	- 1/5	2/5
1				0	1/3	1/3	- 1/3
	1			- 1/2	1/6	1/6	1/3
		1		1/5	7/15	1/15	- 7/15
			1	2/5	- 2/5	- 1/5	2/5

thì ta có ngay ma trận đảo đã theo thứ tự như bảng thiết kế trên.

2.9 Chuẩn của ma trận và chuẩn của véctơ

Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij})$ là một số thực ký hiệu $\|A\|$, thỏa mãn những điều kiện sau:

a. $\|A\| \geq 0$ (với $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$)

b. $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, α là số thực (với $\|-A\| = \|A\|$)

c. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Người ta thường dùng ba chuẩn ma trận sau:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_j |a_{ij}| \text{ (chuẩn cột)}$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (chuẩn Ơclit)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_i |a_{ij}| \text{ (chuẩn hàng)}$$

__Thí du 3.6__ Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, tính $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

Giải:

Ta có:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_j |a_{ij}| = \max(2+5+6,\ 1+3+7,\ 4+2+3) = 13$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 6^2 + 7^2 + 3^2\right)^{\frac{1}{2}} = (153)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_i |a_{ij}| = \max(2+1+4,\ 5+3+2,\ 6+7+3) = 16$$ ■

Vectơ là ma trận chỉ có một cột, do đó đối với vectơ:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ta có 3 chuẩn sau:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Thí du 3.7 Cho $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ tính $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$

Giải:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1+2+3+5 = 11$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + |3|^2 + |-5|^2} = 39^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = \max(1, 2, 3, 5) = 5$$

■

2.10 Sự không ổn định của hệ thống phương trình đại số tuyến tính

Trong tính toán thực hành, ta có thể gạp những hệ thống phương trình đại số tuyến tính mà những thay đổi nhỏ trên các hệ số hoạc trên các phần tử ở vế phải của hệ thống phương trính sẽ gây ra những thay đổi rất lớn về nghiệm. Hệ thống phương trình như vậy gọi là hệ thống phương trình không ổn định trong tính toán. Nếu ngược lại, hệ thống phương trình gọi là ổn định trong tính toán.

Thí du3.8 Hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}01 \end{cases}$$

có nghiệm $x_1 = 0{,}5$ và $x_2 = 1$, trong khi đó hệ thống phương trình với các hệ số của x_1, x_2 và vế phải của phương trình thứ hai thay đổi "đôi chút" ở chử số lẻ thứ hai sau dấu phảy:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2{,}01x_1 + 1x_2 = 2{,}05 \end{cases}$$

có nghiệm $x_1 = 5$ và $x_2 = -8$ (khác nhiều so với $x_1 = 0,5$ và $x_2 = 1$). Vậy hệ thống phương trình đã cho là một hệ thống phương trình không ổn định trong tính toán.

Thí du 3.9 Hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

có nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, trong khi đó hệ thống phương trình với vế trái giữ nguyên, vế phải thay đổi "chút ít" và lần lượt bằng:

32,1; 22,9; 33,1; 30,9

có nghiệm $x_1 = 9,2; x_2 = -12,6; x_3 = 4,5$ và $x_4 = -1.1$ (chứng tỏ một thay đổi cỡ 0,1 trên những phần tử của vế phải dẫn đến biến đổi cỡ 12,6/1 (so sánh 12.6 với 1, biến đổi lớn nhất trên nghiệm). Còn hệ thống phương trình với vế phải giữ nguyên, những phần tử của ma trận hệ số thay đổi "chút ít":

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + \underline{8,1x_3} + \underline{7,2x_4} = 32 \\ \underline{7,08x_1} + \underline{5,04x_2} + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + \underline{5,98x_2} + \underline{9,89x_3} + 9x_4 = 33 \\ \underline{6,99x_1} + \underline{4,99x_2} + 9x_3 + \underline{9,98x_4} = 31 \end{cases}$$

có nghiệm $x_1 = -81; x_2 = 137; x_3 = -34$ và $x_4 = 22$ (trong trường hợp này những thay đổi rất nhỏ trên những phần tử của ma trận hệ số đã làm thay đổi hoàn toàn nghiệm của hệ thống phương trình). Vậy hệ thống phương trình đã cho cũng không ổn định trong tính toán.

Cách đơn giản nhất để nhận biết một hệ thống phương trình tuyến tính $Ax = b$ có ổn định trong tính toán hay không là bên cạnh việc gải hệ thống phương trình đã cho, ta giải thêm hệ thống phương trình $Ax = b_1$ với các phần tử của b_1 sai khác các phần tử của b rất ít. Nếu nghiệm của hệ thống phương trình này khác đáng kể so với nghiệm của hệ thống phương trình đã cho thì hệ thống phương trình đã cho không ổn định trong tính toán.

Ngoài ra, người ta chứng minh được rằng đại lượng $Cond(A)$ xác định bởi:

$$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

(ở đây $\|A\|$ là một chuẩn ma trận nào đó) đo mức độ nhạy cảm của nghiệm x của hệ thống phương trình $Ax = b$ đối với những thay đổi trên các phần tử của ma trận hệ số A và của vế phải b, nghĩa là đo mức độ ổn định của hệ thống phương trình $Ax = b$.

$Cond(A)$ lớn chứng tỏ hệ thống phương trình $Ax = b$ không ổn định trong tính toán. $Cond(A)$ càng gần 1, hệ thống phương trình $Ax = b$ càng ổn định trong tính toán.

Trở lại ví dụ 3.8 và 3.9 ta thấy rằng đối với:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1,01 \end{pmatrix}$$

thì $Cond(A) = \|A_1\|_2 \|A_1^{-1}\|_2 = 501,005$; còn đối với:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

thì $Cond(A_2) = 2984,108$.

Chú ý rằng định thức của ma trận A_1 là $0,02$ và:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 50,5 & -50 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$$

nhưng định thức của ma trận đối xứng A_2 là 1 và:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

cũng là ma trận đối xứng.

Để nâng cao độ chính xác của nghiệm khi giải hệ thống phương trình không ổn định trong tính toán, người ta có thể dùng độ chính xác kép đối với các phép tính trung gian nhưng biện pháp này tốn nhiều thời gian tính toán, do đó không kinh tế. **Một biện pháp khác là dùng quá trình lặp như sau:**

Xét hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \qquad (3.23)$$

Giả sử $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ và $\bar{x}_4$ là nghiệm gần đúng tìm được. Thay chúng vào vế trái của (3.23), nhận được những giá trị mới của b_1, b_2, b_3 và b_4 là $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ và $\bar{b}_4$, nghĩa là:

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 + a_{14}\bar{x}_4 = \bar{b}_1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 + a_{24}\bar{x}_4 = \bar{b}_2 \\ a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 + a_{34}\bar{x}_4 = \bar{b}_3 \\ a_{41}\bar{x}_1 + a_{42}\bar{x}_2 + a_{43}\bar{x}_3 + a_{44}\bar{x}_4 = \bar{b}_4 \end{cases} \qquad (3.24)$$

Đem mỗi phương trình của (3.23) trừ phương trình tương ứng của (3.24), nhận được:

$$\begin{cases} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + a_{14}e_4 = d_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + a_{24}e_4 = d_2 \\ a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 + a_{34}e_4 = d_3 \\ a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3 + a_{44}e_4 = d_4 \end{cases} \qquad (3.25)$$

trong đó $e_i = x_i - \bar{x}_i$ và $d_i = b_i - \bar{b}_i$ $(i = \overline{1,4})$. Bây giờ, ta giải hệ thống phương trình (3.25) đối với e_1, e_2, e_3 và e_4.

Vì

$$e_i = x_i - \bar{x}_i, \text{ nên } x_i = \bar{x}_i + e_i \qquad (i = \overline{1,4})$$

là nghiệm gần đúng tốt hơn của (3.23). Để nâng cao hơn nữa độ chính xác của nghiệm, ta có thể lặp lại quá trình trên.

§3. NHỮNG PHƯƠNG PHÁP LẶP

Những phương pháp lạp là những phương pháp giải gần đúng hệ thống phương trình đại số tuyến tính. Chúng chỉ cho nghiệm gần đúng của hệ thống phương trình, dù các phép tính trung gian đúng hoàn toàn, nhưng ta có thể tính nghiệm gần đúng ấy với độ chính xác bất kỳ (nghĩa là nghiệm gần đúng có thể gần nghiệm đúng bao nhiêu cũng được). Đặc biệt, người ta thường dùng những phương pháp lặp khi ma trận hệ số A của hệ thống phương trình "thưa".

3.1 Phương pháp lặp đơn

a. Nội dung phương pháp

Xét hệ thống phương trình $Ax = b$ (3.2). Đưa (3.2) về dạng tương đương sau:

$$x = \beta + \alpha x \qquad (3.26)$$

trong đó:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}; \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Sau đó ta tự cho một véctơ, gọi là véctơ xấp xỉ đầu, ký hiệu là $x^{(0)}$ (thường chọn $x^{(0)} = \beta$), rồi tính dần $x^{(k+1)}$ theo công thức:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^k, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (3.27)$$

Véctơ $x^{(k)}$ gọi là véctơ lặp thứ k. Nếu dãy những véctơ lặp $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ có giới hạn:

$$x^\star = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$$

thì giới hạn ấy là nghiệm đúng của hệ thống (3.6), và do đó cũng là nghiệm đúng của hệ thống (3.2).

Thật vậy, ta có:

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} (\beta + \alpha x^k) = \beta + \alpha \lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$$

hay: $x^\star = \beta + \alpha x^\star$.

b. Sự hội tụ của phương pháp

Người ta chứng minh được quá trình lặp đơn hội tụ đến nghiệm duy nhất của hệ thống phương trình (3.2), không phụ thuộc vào việc lựa chọn véctơ xấp xỉ ban đầu (nghĩa là $x^{(0)}$ chọn tùy ý), nếu:

$$\|\alpha\|_p < 1 \tag{3.28}$$

c. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Để đánh giá độ lệch giữa nghiệm gần đúng $x^{(k)}$, nhận được bằng phương pháp lặp đơn, và nghiệm đúng $x^\star$ của hệ thống (3.2), người ta chứng minh được những công thức sau:

$$\left\|x^{(k)} - x^\star\right\|_p \le \frac{\|\alpha\|_p}{1-\|\alpha\|_p}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_p \tag{3.29}$$

và

$$\left\|x^{(k)} - x^\star\right\|_p \le \frac{\left(\|\alpha\|_p\right)^k}{1-\|\alpha\|_p}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p \tag{3.30}$$

Từ (3.30) dễ thấy rằng sự hội tụ của phương pháp lặp đơn càng nhanh nếu $\|\alpha\|_p$ càng bé. Bất đẳng thức (3.30) cũng cho phép, sau lần lặp thứ nhất (sau khi biết được $x^{(1)}$), xác định được số lần lặp cần tiến hành $K(\varepsilon)$ để nhận được nghiệm gần đúng $x^{(k)}$ với độ chính xác ε.

Trong trường hợp $\|\alpha\|_p \le 1/2$, đánh giá (3.29) có dạng đơn giản sau:

$$\left\|x^{(k)} - x^\star\right\|_p \le \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_p \tag{3.31}$$

Chú ý. $\|\cdot\|_p$ nêu trong mục b và c có thể dùng $\|\cdot\|_\infty$ hoặc $\|\cdot\|_1$ hoặc $\|\cdot\|_2$.

<u>*Thí dụ 3.10*</u>

Giải hệ phương trình Ax=b như sau bằng phương pháp lặp đơn.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

<u>**Giải**</u>

1. Chú ý rằng những phần tử trụ nằm trên đường chéo chính của ma trận hệ số của hệ thống phương trình đã cho có trị tuyệt đối lớn hơn nhiều so với những phần tử còn lại, do đó để đưa về dạng tương đương (3.26) với $\|\alpha\|_p < 1$, ta chia hai vế của phương trình đầu cho 4, hai vế của phương trình hai cho 3 và hai vế của phương trình ba cho 4. Nghiã là ta chia cho các phần tử trụ có trị tuyệt đối lớn, ta thu được:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \qquad\qquad - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 \qquad\qquad + 0.05x_3, \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{cases} \tag{3.32}$$

hay $$x = \beta + \alpha x, \quad \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Ta có: chuẩn hàng:

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{1j}| = 0 + 0.06 + 0.02 = 0.08$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{2j}| = 0.03 + 0 + 0.05 = 0.08$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{3j}| = 0.01 + 0.02 + 0 = 0.03$$

Do đó $\|\alpha\|_{p=\infty} = \max_i \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max(0.08,\ 0.08,\ 0.03) = 0.08 < 1$

và điều kiện (3.28) được thỏa mãn. Vậy quá trình lạp đơn áp dụng vào hệ thống (3.32) hoạc (3.33) sẽ hội tụ.

2. Chọn $x^{(0)} = \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, sau đó ta tính $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$. theo công thức (3.27) ta nhận được bảng kết quả sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\right\|$	$\left\|x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\right\|$	$\left\|x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right\|$	MAX
0	2	3	5				
1	1.920000	3.190000	5.040000	0.08	0.19	0.04	0.19
2	1.909400	3.194400	5.044600	0.0106	0.0044	0.0046	0.0106
3	1.909228	3.194948	5.044794	0.000172	0.000548	0.000194	0.000548
4	1.909199	3.194963	5.044807	2.9E-05	1.49E-05	1.27E-05	2.9E-05

5	1.909198	3.194964	5.044807				
6	1.909198	3.194964	5.044807				
7	1.909198	3.194964	5.044807				
8	1.909198	3.194964	5.044807				
9	1.909198	3.194964	5.044807				

3. Nếu ta xem $x^{(3)}$ là nghiệm gần đúng cần tìm, ta có thể đánh giá sai số phạm phải của $x^{(3)}$ theo (3.29):

$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_{\infty}=\max_{i}\left|x_i^{(3)}-x_i^{(2)}\right|=$$

= max(0.000172, 0.000548, 0.000194) = 0.000548

và $$\left\|x^{(3)}-x^{*}\right\|_{\infty}=\frac{\|\alpha\|_{\infty}}{1-\|\alpha\|_{\infty}}\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_{\infty}$$

$$\left\|x^{(3)}-x^{*}\right\|_{\infty}=\frac{0.08}{1-0.08}(0.000548)=0.0000476<0.00005 \quad \blacksquare$$

3.2 Phương pháp Seidel

a. Nội dung phương pháp

Xét hệ thống phương trình (3.2). Đưa (3.2) về dạng thương đương sau:

$$x=\beta+\alpha x \qquad (3.26)$$

trong đó:

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix};\ \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

hay $x_i=\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j \ \ (i=1,2,\ldots,n)$.

Tự cho một véctơ, gọi là véctơ xấp xỉ đầu, ký hiệu là $x^{(0)}$ (thường chọn $x^{(0)}=\beta$) rồi tính dần $x^{(k+1)}$ theo công thức sau:

$$\boxed{x_1^{(k+1)}}=\beta_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j^{(k)}$$

$$\boxed{x_2^{(k+1)}}=\beta_2+\alpha_{21}\boxed{x_1^{(k+1)}}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)}$$

$$\boxed{x_3^{(k+1)}} = \beta_3 + \alpha_{31}\boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{32}\boxed{x_2^{(k+1)}} + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{3j}x_j^{(k)} \qquad (3.34)$$

$$\boxed{x_4^{(k+1)}} = \beta_4 + \alpha_{41}\boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{42}\boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{43}\boxed{x_3^{(k+1)}} + \sum_{j=4}^{n} \alpha_{4j}x_j^{(k)}$$

....

$$\boxed{x_i^{(k+1)}} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\boxed{x_j^{(k+1)}} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}x_j^{(k)}$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}\boxed{x_j^{(k+1)}} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} \quad , k = 0,1,2,\ldots$$

Hệ thức (3.4) có thể viết lại như sau: $\boxed{x^{(k+1)} = \beta + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}}$, với biểu thức này ta có thể sử dụng phương pháp lặp ở đây.

trong đó:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \vdots & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \vdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \vdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \vdots & \alpha_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \vdots & \alpha_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Đó là phương pháp Seidel. Phương pháp này có thể xem là một biến thể của phương pháp lạp đơn. **Phương pháp lặp Seidel khác phương pháp lặp đơn ở chỗ: khi tính thành phần thứ i của véctơ lặp thứ $k+1$: $x_i^{(k+1)}$ ta sử dụng ngay những thành phần $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ vừa tính được. Để thế vào ngay có thể các biểu thức dưới nó, mà không chờ hết một bước lặp như phương pháp lặp đơn (theo nguyên tắc gặt lúa non). Điều này làm giảm phần dư sai số giữa 2 bước lặp. Vì thế nó còn được gọi là "phương pháp giảm dư".**

Hoàn toàn giống phương pháp lạp đơn, dễ chỉ ra ràng nếu dãy những véctơ lạp $x^{(0)}$, $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ có giới hạn thì giới hạn ấy là nghiệm đúng của hệ thống (3.26) và do đó cũng là nghiệm đúng của hệ thống (3.2).

b. Sự hội tụ của phương pháp

Điều kiện hội tụ của phương pháp lạp Seidel hoàn toàn giống điều kiện hội tụ của phương pháp lạp đơn, nghiã là: $\|\alpha\|_p < 1$

c. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Để đánh giá độ lệch giữa nghiệm gần đúng $x^{(k)}$, nhận được bàng phương pháp lạp Seidel và nghiệm đúng x^* của hệ thống phương trình (3.2), người ta chứng minh được những công thức sau:

•Đối với $\|\cdot\|_\infty$:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\mu}{1-\mu}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty \tag{3.35}$$

trong đó: $\mu = \max\limits_i \frac{q_i}{1-p_i} < \nu < 1, i = 1,2,\ldots,n$

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1}\left|\alpha_{ij}\right|;\ q_i = \sum_{j=i}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|$$

và (3.35) ==> $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\mu^k}{1-\mu}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty$ (3.36)

Thật vậy; từ điều kiện: $\nu = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| = \|\alpha\|_\infty < 1$, ta có:

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| \le \nu < 1, \qquad (p_i + q_i) - \frac{q_i}{1-p_i} = \frac{p_i(1-p_i-q_i)}{1-p_i} > 0$$

vậy $(p_i + q_i) > \frac{q_i}{1-p_i} \Rightarrow 1 > \nu = \max\limits_i (p_i + q_i) > \max\limits_i \frac{q_i}{1-p_i} = \mu$

tức $\mu < 1$ đpcm..

•Đối với $\|\cdot\|_1$:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_1 \le \frac{\rho}{(1-s)(1-\rho)}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_1 \tag{3.37}$$

trong đó: $s = \max\limits_j \sum\limits_{i=j+1}^{n}\left|a_{ij}\right|;\ \rho = \max\limits_j \frac{t_j}{1-s_j}, (j = \overline{1,n})$

$$t_j = \sum_{i=1}^{j}\left|\alpha_{ij}\right|;\ s_j = \sum_{i=j+1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|, (j = \overline{1,n-1})$$

$$s_n = 0\,; \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}$$

và (3.37) ==> $$\left\| x^{(k)} - x^* \right\|_1 \le \frac{\rho^k}{(1-s)(1-\rho)} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_1 \qquad (3.38)$$

•Đối với $\|\cdot\|_2$, ta không xét vì phức tạp.

Nhận xét: Khi tính $x_i^{(k+1)}$ $(1 \le i \le n)$ bằng phương pháp lạp Seidel (công thức (3.34)) ta không dùng $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ mà dùng ngay $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ vừa tính được, vì vậy khi tính xong $x_i^{(k+1)}$ ta không cần giữ lại $x_i^{(k)}$ nữa và có thể đạt $x_i^{(k+1)}$ vào ô nhớ của $x_i^{(k)}$. Điều đó cho phép ta chỉ dùng n ô nhớ để chứa các véctơ nghiệm gần đúng khi dùng phương pháp lạp Seidel thay cho $2n$ ô nhớ đối với phương pháp lạp đơn. Đây chính là ưu điểm của phương pháp lạp Seidel so với phương pháp lạp đơn khi n lớn.

__Thí du 3.11__ Giaỉ hệ phương trình Ax=b như sau bằng phương pháp lạp Seidel.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (3.32)$$

__Giải__

1. Theo kết quả ở thí dụ 3.10 ta có: chia cho các phần tử trụ có trị tuyệt đối lớn, ta thu được:

Ax=b <==> $$\begin{cases} x_1 = 2 \qquad\qquad -0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 \qquad\qquad + 0.05x_3 \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{cases}, \; x = \beta + \alpha x, \;\; \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

và $\|\alpha\|_\infty = 0.08 < 1$. Vậy quá trình lạp Seidel áp dụng vào hệ thống (3.32) sẽ hội tụ.

2. Chọn $x^{(0)} = \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, sau đó ta tính $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$ theo công thức (3.34) ta nhận được bảng kết quả sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1.920000	3.192400	5.044648
2	1.909349	3.194952	5.044806
3	1.909199	3.194964	5.044807
4	1.909198	3.194964	5.044807
5	1.909198	3.194964	5.044807

Xét sai số: Ta có bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x_1^{(k)}-x_1^{(k-1)}\right\|$	$\left\|x_2^{(k)}-x_2^{(k-1)}\right\|$	$\left\|x_3^{(k)}-x_3^{(k-1)}\right\|$	MAX
0	2	3	5				
1	1.92000	3.192400	5.04464	0.080000000	0.192400000	0.044648000	
2	1.90934	3.194952	5.04480	0.010651040	0.002551931	0.000157549	
3	1.90919	3.194964	5.04480	0.000149965	0.000012376	0.000001747	0.00014996
4	1.90919	3.194964	5.04480	0.000000708	0.000000109	0.000000009	
5	1.90919	3.194964	5.04480				
6	1.90919	3.194964	5.04480				
7	1.90919	3.194964	5.04480				
8	1.90919	3.194964	5.04480				
9	1.90919	3.194964	5.04480				

$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\| = \max_i \left|x_i^{(3)}-x_i^{(2)}\right| = \mathbf{0.000149965}$$

3. Nếu ta xem $x^{(3)}$ là nghiệm gần đúng cần tìm, ta có thể đánh giá sai số phạm phải của $x^{(3)}$ theo (3.35):

$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_\infty = \max_i \left|x_i^{(3)}-x_i^{(2)}\right| =$$

= max(**0.000149965, 0.000012376, 0.000001747**) = **0.00014996**

$$\mu = \max_i \frac{q_i}{1-p_i} = \max(0.08,\ 0.0515463,\ 0) = 0.08$$

Và $\left\|x^{(3)}-x^*\right\|_\infty \le \dfrac{\mu}{1-\mu}\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_\infty = 0.000013$ ■

Qua thí dụ này ta thấy rằng nếu lấy $x^{(3)}$ làm nghiệm gần đúng phải tìm, thì phương pháp lặp Seidel cho ta kết quả tốt hơn phương pháp lặp đơn.

Tổng quát, người ta chứng minh được kết quả sau: "Nếu phương pháp lạp đơn hội tụ thì phương pháp Seidel cũng hội tụ và phương pháp Seidel hội tụ nhanh hơn".

Thí du 3.12 Giải hệ phương trình Ax=b như sau bằng phương pháp

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 6\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}6\\ -9\\ 24\end{bmatrix}$$

a. Lạp đơn.

b. Seidel.

c. Lặp theo công thức: $\boxed{x^{(k+1)}=\beta+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}}\Rightarrow$

$$\boxed{x^{(k+1)}=(I-L)^{-1}\left[Ux^{(k)}+\beta\right]}$$

Giải

a. Lạp đơn. Làm tương tự các bước thuật toán như các bài trước ta có:

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lvert x_1^{(k)}-x_1^{(k-1)}\rvert$	$\lvert x_2^{(k)}-x_2^{(k-1)}\rvert$	$\lvert x_3^{(k)}-x_3^{(k-1)}\rvert$	MAX
	X1	X2	X3				
	4	-1	-1	6			
	1	5	-2	-9			
	2	-2	6	24			
0	1.5	-1.8	4				
1	2.05	-0.5	2.9	0.55	1.3	1.1	1.3
2	2.1	-1.05	3.15	0.05	0.55	0.25	0.55
3	2.025	-0.96	2.95	0.075	0.09	0.2	0.2
4	1.9975	-1.025	3.005	0.0275	0.065	0.055	0.065
5	1.995	-0.9975	2.9925	0.0025	0.0275	0.0125	0.0275
6	1.99875	-1.002	3.0025	0.00375	0.0045	0.01	0.01
7	2.000125	-0.99875	2.99975	0.001375	0.00325	0.00275	0.00325
8	2.00025	-1.00013	3.000375	0.000125	0.001375	0.000625	0.001375
9	2.000063	-0.9999	2.999875	0.000188	0.000225	0.0005	0.0005
10	1.999994	-1.00006	3.000013	6.87E-05	0.000163	0.000138	0.000163
11	1.999988	-0.99999	2.999981	6.25E-06	6.88E-05	3.13E-05	6.88E-05

b. Seidel. Làm tương tự các bước thuật toán như các bài trước ta có:

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lvert x_1^{(k)}-x_1^{(k-1)}\rvert$	$\lvert x_2^{(k)}-x_2^{(k-1)}\rvert$	$\lvert x_3^{(k)}-x_3^{(k-1)}\rvert$	MAX
	X1	X2	X3	3			
	4	-1	-1	6			

	1	5	-2	-9			
	2	-2	6	24			
0	1.5	-1.8	4				
1	2.05	-0.61	3.1133333	0.55	1.19	0.8866667	1.19
2	2.1258333	-0.979833	2.9647778	0.0758333	0.36983333	0.1485556	0.36983333
3	1.9962361	-1.013336	2.9968093	0.1295972	0.03350278	0.0320315	0.12959722
4	1.9958683	-1.00045	3.0012273	0.0003678	0.01288616	0.004418	0.01288616
5	2.0001943	-0.999548	3.0000859	0.004326	0.00090199	0.0011413	0.00432604
6	2.0001345	-0.999993	2.9999577	5.984E-05	0.00044457	0.0001282	0.00044457
7	1.9999913	-1.000015	2.9999978	0.0001432	2.2657E-05	4.018E-05	0.0001432
8	1.9999957	-1	3.0000014	4.381E-06	1.5197E-05	3.605E-06	1.5197E-05

Nhận xét: Ta thấy với cùng một độ chính xác như nhau 10^{-4}, thì phương pháp Seidel (8 bước) hội tụ nhanh hơn phương pháp lạp đơn (11 bước).

c/ Sinh viên tự làm: $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = C = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.8 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$A = I - L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = U = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gài công thức 570MS: $MatA^{-1}\left(MatBMatC + MatC\right)\boxed{=}$

$MatA^{-1}\left(MatB\ MatAns + MatC\right)\boxed{=}\ldots\boxed{=}$

Ta sẽ thu được kết quả như bảng Seidel ở trên.

§4. PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY

4.1 Phương pháp luận:

Trong kinh tế (xã hội) cũng như trong cơ học (hiện tượng tự nhiên) ta thường gạp phải bài toán giải phương trình Ax=B, với A là ma trận vuông đối xứng, xác định dương, điều này hoàn toàn biện chứng, bởi một nhẽ là: khi thiết lập một mô hình gì đi nữa thì luôn đụng phải vấn đề (bài toán) cân bằng, cân đối dẫn đến bài toán cực tiểu hóa các hàm năng lượng, mà các hàm năng lượng của một vật chất là một dạng toàn phương đầy đủ, luôn là đối xứng và xác định dương.

Nên ta phát xuất từ việc giải hệ phương trình Ax=B, với ma trận vuông A, lần lượt từ đơn giản đến phức tạp như sau:

1/ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$, Ax=B <==> $a_i x_i = b_i \Leftrightarrow x_i = \dfrac{b_i}{a_i}$

2/ $U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$, Ux=B ==> ta giải từ dưới lên trên.

3/ $L=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$, Lx=B ==> ta giải từ trên xuống dưới .

4/ A= LU, L tam giác dưới (Lower), U tam giác trên (upper). Với det(L) $\neq 0 \neq$ det(U)

$$Ax = B \Leftrightarrow L(Ux) = B \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = B & (truoc) \\ Ux = y & (sau) \end{cases}$$

Định lý : Cholesky: A đối xứng và xác định dương
<==> $\exists$ B (tam giác dưới), det(B) $\neq 0$
sao cho A $=BB^T$ (B không suy biến).

Chứng minh :
(<==) A $=BB^T$ là đối xứng (hiển nhiên), vì luôn có $(Ax,y)=(x,A^Ty)$
$x^TAx =(Ax,x)= (BB^Tx, x) = (B^Tx, B^Tx) \geq 0$. Và
$x^TAx =0$ ==> $B^Tx =0$ vì det(B) $\neq 0$ nên x=0.

(==>) ta chứng minh qui nạp theo cấp n của ma trận A như sau:
1/ n=1 hiển nhiên.
2/ Giả sử đúng với ma trận cấp n-1, coi A ma trận đầy cấp n, đối xứng, xác định dương, ta thành lập A như sau: $A = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \alpha \\ \alpha^T & a \end{bmatrix}$, với $\alpha \in R^{n-1}$,

$\widetilde{A} \in M_{n-1}(R)$ vuông cấp n-1, a thực $\in$R. Với A đối xứng thì $\widetilde{A}$ cũng đối xứng, còn $\widetilde{A}$ cũng xđịnh dương, thật vậy, $\alpha \neq 0$ để A thực sự là cấp n

Coi $\forall\ (0 \neq \tilde{x}) \in R^{n-1}$. Coi $x=\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix} \in R^n$, tính $x^T A x = \tilde{x}^T A \tilde{x}$. Thật vậy theo sơ đồ nhân ma trận:

$$x^T A x = \begin{array}{cc|c|c|c} & & \tilde{A} & \alpha & \tilde{x} \\ \hline & & \alpha & a & 0 \\ \hline \tilde{x} & 0 & \tilde{x}\tilde{A} & z & y \end{array}, \quad z = \tilde{x}\alpha,$$

$y = \tilde{x}^T A \tilde{x} + (0.\ z) \quad ==> y = \tilde{x}^T A \tilde{x} + (0.\ \tilde{x}\alpha) = \tilde{x}^T A \tilde{x}$

Vậy theo giả thiết qui nạp $\tilde{A}$ là cấp n-1, đ xứng và xác định dương.
Ta có:
$\tilde{A} = M.M^T$, M (tam giác dưới cấp n-1), không suy biến $\det(M) \neq 0$.
Vậy

$$A = \begin{bmatrix} MM^T & \alpha \\ \alpha^T & a \end{bmatrix} = BB^T,$$

Tìm B dưới dạng $B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ \beta^T & \lambda \end{bmatrix}$ cũng là tam giác dưới, cấp n, trong đó $\beta \in R^{n-1}$, λ thực $\in R$. Bây giờ tìm β, λ là xong! ta chứng minh $\lambda \neq 0$, $\beta \neq 0$, để B thực sự là cấp n

$$BB^T = \begin{bmatrix} M & 0 \\ \beta^T & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T & \beta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MM^T & M\beta \\ \beta^T M^T & \beta^T\beta + \lambda^2 \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} MM^T & \alpha \\ \alpha^T & a \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = M\beta \\ a = \beta^T\beta + \lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = M^{-1}\alpha \neq 0 \\ \lambda^2 = a - \left(M^{-1}\alpha\right)^T M^{-1}\alpha = a - \alpha^T \left(\tilde{A}\right)^{-1} \alpha \end{cases}$$

$\lambda^2 = a - \alpha^T \left(\tilde{A}\right)^{-1} \alpha > 0$??

Chọn x để : $0 \leq (Ax,x) = a - \alpha^T \left(\tilde{A}\right)^{-1} \alpha$

$$\begin{bmatrix} \left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(Ax,x\right) = a - \alpha^T \left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha \geq 0 \text{, (do A Xđịnh dương).}$$

Thực vậy

$$\left(Ax,x\right) = \begin{bmatrix} \left(\left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha\right)^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \alpha \\ \alpha^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha\right)^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha - \alpha = 0 \\ \alpha^T\left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha - a \end{bmatrix} = \alpha^T\left(\widetilde{A}\right)^{-1}\alpha - a. \qquad \blacksquare$$

Vậy ta đã chứng minh sự tồn tại ma trận B, và định lý được chứng minh.

4.2 Xây dựng ma trận B.

Bây ta tìm hiểu ma trận tam giác dưới B.

Thực ra chứng minh tồn tại thì phức tạp, nhưng tính cụ thể B chỉ dựa vào tính chất A đối xứng và xác định dương mà thôi. Ta có:

$$B = b_{ij} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \end{bmatrix}, \quad b_{ij} = 0 \ (i < j).$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\left(b_{kj}\right)^T = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{jk} \text{, A là ma trận đầy đối xứng.}$$

Nên ta chỉ cần xét tam giác trên của A mà thôi $i \leq j; \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik}b_{jk}$

vì $b_{ij} = 0$ $(i < j)$. Ta tính lần lượt cột 1, cột 2 phụ thuộc vào cột 1....

$\boxed{i=1}$ Tính cột 1 của B: $a_{1j} = b_{11}b_{j1}$

$\Longrightarrow$ j=1: $a_{11} = \left(b_{11}\right)^2$ chọn $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$j \geq 2$: $b_{j1} = \dfrac{a_{1j}}{b_{11}} = \dfrac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}, \quad 2 \leq j \leq n$

$\boxed{i=2}$ Tính cột 2 của B: $a_{2j} = \sum_{k=1}^{2} b_{ik}b_{jk} = b_{21}b_{j1} + b_{22}b_{j2}$

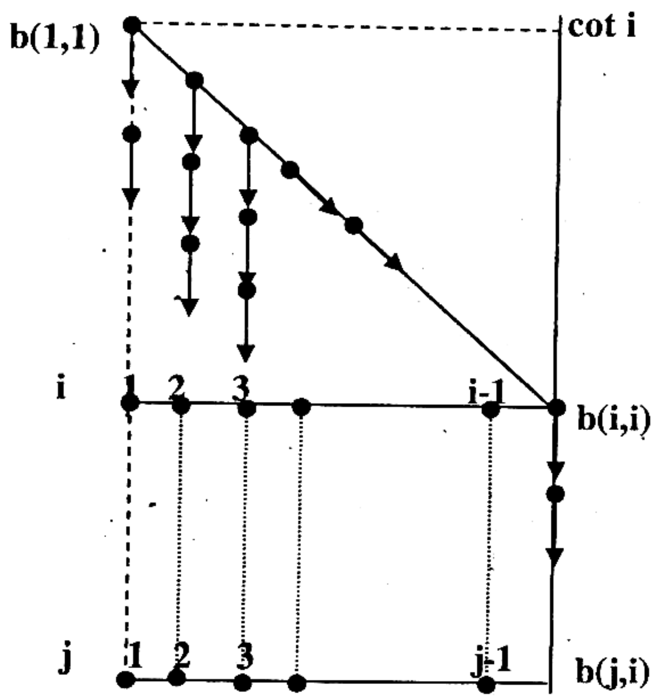
$\Longrightarrow$ j=2: $a_{22} = \left(b_{21}\right)^2 + \left(b_{22}\right)^2$

chọn $b_{22} = \sqrt{a_{22} - \left(b_{21}\right)^2}$

$$j \geq 3:\ b_{j2} = \frac{1}{b_{22}}\left(a_{j2} - b_{j1}b_{21}\right), \quad 3 \leq j \leq n$$

Nhớ rằng A là đối xứng $a_{ij} = a_{ji}$

Coi sơ đồ tính cột i , hàng j của B, phụ thuộc hàng i,
hàng j của các cột trước đó $k = \overline{1, i-1}$,
cụ thể là tích vô hướng song song
giữa hàng i và hàng j như hình vẽ



$\boxed{i \leq j}$ Tính cột i của B:

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}b_{ik} + \left(b_{ii}\right)^2 = \sum_{k=1}^{i-1}\left(b_{ik}\right)^2 + \left(b_{ii}\right)^2$$

$$\boxed{b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1}\left(b_{ik}\right)^2}}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk}b_{ik} + b_{ji}b_{ii}$$

$$b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk}b_{ik}\right) \text{ hay}$$

$$\boxed{b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk}b_{ik}\right)}$$

Vậy chủ yếu dựa vào 2 công thức đóng khung này để tính toán các phần tử của B:

$b_{11}, b_{21}, b_{31}, \ldots\ldots, b_{n1},$

$b_{22}, b_{32}, b_{42}, \ldots\ldots\ldots, b_{n2},$

$b_{33}, b_{43}, b_{53}, \ldots\ldots\ldots, b_{n3},$

$b_{44}, b_{54}, b_{64}, \ldots\ldots\ldots, b_{n4},$

....

....

$b_{n-1,n-1}, b_{n,n-1},$

$b_{n,n}$

Chú ý:

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - (b_{21})^2} \Rightarrow a_{22} = \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 + (b_{22})^2 \Rightarrow (b_{22})^2 = a_{22}a_{11} - (a_{12})^2 \geq 0$$

(vì A xác định dương).

__Thí du 3.13:__ Giaỉ hệ phương trình Ax=b như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

a/ Bằng phương pháp Gauss.

b/ Bằng Cholesky tìm L(ma trận tam giác dưới): $L.L^T = A$

c/ Tìm y: $L.y = b$

d/ Tìm lại x: $L^T x = y$

e/ Tính định thức L ==> định thức A.

__Giải__

a/ Dễ dàng tìm bằng Gauss:

1	2	3	7
2	5	7	15
3	7	26	70
3	7	26	70
2	5	7	15
1	2	3	7
1	2.333333	8.666667	23.33333
0	0.333333	-10.3333	-31.6667
0	-0.33333	-5.66667	-16.3333

1	2.333333	8.666667	23.33333
0	-0.33333	-5.66667	-16.3333
0	0.333333	-10.3333	-31.6667
1	2.333333	8.666667	23.33333
0	1	17	49
0	0	-16	-48
1	2.333333	8.666667	23.33333
0	1	17	49
0	0	1	3
16		x_1	2
		x_2	-2
		x_3	3

b/ Dễ dàng chứng minh A là đối xứng và xác định dương. Ta tìm B:

Dùng công thức: $\boxed{b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(b_{ik}\right)^2}}$, $\boxed{b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk} b_{ik}\right)}$

dễ dàng tìm $B \equiv L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ thử lại đẳng thức: $L.L^T = A$.

c/ Tìm y: $L.y = b$

Do ma trận L là tam giác dưới, ta giải xuôi nên ta có ngay: $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

d/ Tìm lại x: $L^T x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$,

giải ngược lần nữa ta có: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

e/ $L.L^T = A \Rightarrow |A| = \left|L.L^T\right| = |L|\left|L^T\right| = |L|^2 = (1 \times 1 \times 4)^2 = 16$

Thí dụ 3.14: Giải hệ phương trình Ax=b như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

a/ Bằng phương pháp Gauss.

b/ Bằng Cholesky tìm L(ma trận tam giác dưới): $L.L^T = A$

c/ Tìm y: $L.y = b$

d/ Tìm lại x: $L^T x = y$

Giải

a/ Dễ dàng tìm bằng Gauss:

1	2	1	2	-1
2	8	4	8	2
1	4	3	2	-5
2	8	2	16	18
2	8	4	8	2
1	2	1	2	-1
1	4	3	2	-5
2	8	2	16	18
1	4	2	4	1
0	-2	-1	-2	-2
0	0	1	-2	-6
0	0	-2	8	16
1	4	2	4	1
0	1	0.5	1	1
0	0	1	-2	-6
0	0	-2	8	16
1	4	2	4	1
0	1	0.5	1	1
0	0	-2	8	16
0	0	1	-2	-6
1	4	2	4	1
0	1	0.5	1	1
0	0	1	-4	-8
0	0	0	2	2
1	4	2	4	1
0	1	0.5	1	1
0	0	1	-4	-8
0	0	0	1	1
16			x_1	-3

			x_2	2
			x_3	-4
			x_4	1

b/ Dễ dàng chứng minh A là đối xứng và xác định dương. Ta tìm B:

Dùng công thức: $\boxed{b_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}(b_{ik})^2}}$, $\boxed{b_{ji}=\frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}b_{jk}b_{ik}\right)}$

theo sơ đồ trên, ta dễ dàng tìm $B\equiv L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\1&1&1&0\\2&2&-2&2\end{bmatrix}$

thử lại đẳng thức: $L.L^T=A$.

c/ Tìm y: $L.y=b$

Do ma trận L là tam giác dưới, ta giải xuôi nên ta có ngay: $y=\begin{bmatrix}-1\\2\\-6\\2\end{bmatrix}$

d/ Tìm lại x: $L^Tx=y\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&1&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}-1\\2\\-6\\2\end{bmatrix}$,

giải ngược lần nữa ta có: $x=\begin{bmatrix}-3\\2\\-4\\1\end{bmatrix}$

e/ $L.L^T=A\Rightarrow|A|=|L.L^T|=|L||L^T|=|L|^2=(1\times2\times1\times2)^2=16$

§5. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU TỔNG QUÁT

Phương pháp Cholesky chỉ dùng cho matrận đối xứng, xác định dương còn đối với matrận A thông thường ta dùng nhân tử LU như sau:

Trong A=LU, ta xét hai trường hợp: ma trận L và ma trận U có đường chéo chính bằng 1.

5.1 Phương pháp Doolittle (L có đường chéo chính bằng 1):

Khi đó A=LU với:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \text{ và } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \vdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \vdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức sau:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_{1j} = a_{1j} & (1 \le j \le n) \\ \ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} & (2 \le i \le n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=i-1} \ell_{ik} u_{kj} & (1 < i \le j) \\ \ell_{ij} = \dfrac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) & (1 < i < j) \end{array}} \qquad (5.1)$$

Trong (5.1), ta phải xây dựng **đồng thời** cả hai ma trận L và U

5.2 Phương pháp Crout (U có đường chéo chính bằng 1):

Khi đó A=LU với:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \vdots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \text{ và } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \vdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \vdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức sau:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ell_{i1} = a_{i1} & (1 \le i \le n) \\ u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{\ell_{11}} & (2 \le j \le n) \\ \ell_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=j-1} \ell_{ik} u_{kj} & (1 < j \le i) \\ u_{ij} = \dfrac{1}{\ell_{ii}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=i-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) & (1 < i < j) \end{array}} \qquad (5.2)$$

Trong (5.2), cũng ta phải xây dựng **đồng thời** cả hai ma trận L và U.

Thí du 3.15: Giải hệ phương trình Ax=b như sau:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

a/ Bàng phương pháp Doolittle $L.U = A$

b/ Tìm y: $L.y = b$

c/ Tìm lại x: $Ux = y$

d/ Làm lại bàng phương pháp Crout.

Giải

a/ Từ (5.1) ta dễ dàng tính được như sau:

Ta tính cùng lúc 2 ma trận L, U theo trình tự sau:

1. $u_{11} \to u_{12} \to u_{13} \to u_{14}$
2. $\to \ell_{21} \to \ell_{31} \to \ell_{41}$
3. i=2, j chạy: $\to u_{22} \to u_{23} \to u_{24}$
4. j=2, i chạy: $\to \ell_{32} \to \ell_{42}$

   Bước 5, 6 là bát đầu lạp lại bước 3, 4
5. $\to u_{33} \to u_{34}$
6. $\to \ell_{43}$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -13\end{bmatrix}=\text{LU}$$

b/ $L.y = b$ <==> $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$

Do ma trận L là tam giác dưới, ta giải xuôi nên ta có ngay: $y=\begin{bmatrix}4\\ -7\\ 13\\ -13\end{bmatrix}$

c/ Tìm lại x: $Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -13\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4\\ -7\\ 13\\ -13\end{bmatrix}$, giải ngược lần nữa ta có: $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d/ Sinh viên tự nghiên cứu thêm (ngược lại với Doolittle)

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.333333333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ (5.2) ta dễ dàng tính được như sau:

Ta tính cùng lúc 2 ma trận L, U theo trình tự sau:

1. $\ell_{11} \to \ell_{21} \to \ell_{31} \to \ell_{41}$
2. $\to u_{12} \to u_{13} \to u_{14}$
3. j=2, i chạy: $\to \ell_{22} \to \ell_{32} \to \ell_{42}$
4. i=2, j chạy: $\to u_{23} \to u_{24}$

   Bước 5, 6 là bắt đầu lạp lại bước 3, 4
5. $\to \ell_{33} \to \ell_{43}$
6. $\to u_{34}$.

<u>Chú ý:</u> Phương pháp phân tích LU trình bày trên đây chỉ là một trong nhiều phương pháp phân tích LU khác nhau. Ví dụ cho:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1.00 & 0 \\ 0.50 & 0.40 & 1.00 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4.0 & 7.0 & 3.00 \\ 0 & 1.25 & 4.25 \\ 0 & 0 & 4.80 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, nhưng lại có biểu thức PA=LU$=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

BÀI TẬP

1. Dùng phương pháp Gauss giải những hệ thống phương trình $Ax = b$ cho dưới đây. Các phép tính lấy đến 5 số lẻ sau dấu phẩy:

   a. $A = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 8,30 & 2,62 & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 7,78 & 2,46 \\ 3,77 & 7,21 & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65 & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -10,65 \\ 12,21 \\ 15,45 \\ -8,35 \end{pmatrix}$

2. Dùng phương pháp Gauss có tìm trụ lớn nhất, giải những hệ thống phương trình cho dưới đây. Các phép tính lấy đế 5 chữ số có nghĩa:

a. $A = \begin{pmatrix} 2,6 & -4,5 & -2,0 \\ 3,0 & 3,0 & 4,3 \\ -6,0 & 3,5 & 3,0 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 19,70 \\ 3,21 \\ -18,25 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 0,75 \\ 2,25 & 1,32 & 4,58 & 0,49 \\ 5,31 & 6,28 & 0,98 & 1,04 \\ 9,39 & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 4,21 \\ 6,47 \\ 2,38 \\ 10,48 \end{pmatrix}$

3. Dùng phương pháp Gauss, tính các định thức:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 8,64-\alpha & 1,71 & 5,42 \\ -6,39 & 4,25 & 1,84+\alpha \\ 4,21 & 7,92-\alpha & -3,41 \end{vmatrix}$$

Trong đó: $\alpha = 0,5n$; $n = 0,1$.

4. Dùng phương pháp Gauss, tính ma trận nghịch đảo của những ma trận sau:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 24,21+\alpha & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,72+\alpha \end{pmatrix}$$

trong đó: $\alpha = 0,2n$; $n = 0,1$.

5. Giải hệ thống phương trình:

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a. Bàng phương pháp lạp đơn.

b. Bàng phương pháp lạp Seidel.

Đối với mỗi phương pháp, tính lạp ba lần, lấy $x^{(0)} = \beta$ và đánh giá sai số của $x^{(3)}$.

6. Giải hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} 24,21x_1 + 2,42x_2 + 3,85x_3 = 30,24 \\ 2,31x_1 + 31,49x_2 + 1,52x_3 = 40,96 \\ 3,49x_1 + 4,85x_2 + 28,73x_3 = 42,81 \end{cases}$$

Bằng phương pháp lặp cho tới khi:

$$\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_\infty \le 10^{-4}$$

và đánh giá sai số của nghiệm gần đúng nhận được.

7. Giải hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

bằng phương pháp lặp Seidel cho tới khi

$$\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_\infty \le 10^{-4}$$

so sánh kết quả nhận được với nghiệm đúng:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

8. Giaỉ hệ phương trình Ax=b như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a/ Bằng phương pháp Gauss.

b/ Bằng Cholesky tìm L(ma trận tam giác dưới): $L.L^T = A$

c/ Tìm y: $L.y = b$

d/ Tìm lại x: $L^T x = y$

9. Giaỉ lại bài 8 bằng LU:

a/ Phương pháp Doolittle.

a/ Phương pháp Crout.

10. Phân tích A thành LU:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Đáp số

1. a. $x_1 = 0,36450;\ x_2 = 0,53053;\ x_3 = -0,40649$

   b. $x_1 = -3,01480;\ x_2 = -1,17641;\ x_3 = 4,59989;\ x_4 = -0,73923$

2. a. $x_1 = 1,7781;\quad x_2 = -4,3351;\ x_3 = 2,5304$

   b. $x_1 = 0,44093;\ x_2 = -0,43009;\ x_3 = 1,1546;\ x_4 = 1,15463$

3. $\Delta(0) = -646,416;\qquad \Delta(1) = -633,677$

4. $$A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0,042334 & -0,002399 & -0,005548 \\ -0,002881 & 0,032180 & -0,001317 \\ -0,004658 & -0,005143 & 0,035716 \end{pmatrix}$$

   $$A^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0,041973 & -0,002384 & -0,005462 \\ -0,002858 & 0,032178 & -0,001311 \\ -0,004586 & -0,005109 & 0,035457 \end{pmatrix}$$

5. a. $x_1^{(3)} = -0,9618358;\quad x_2^{(3)} = -3,9448436$

   $x_3^{(3)} = -2,9398827;\quad \left\| x^{(3)} - x^* \right\|_\infty \le 0,1101952$

   b. $x_1^{(3)} = -0,9922021;\quad x_2^{(3)} = -3,9937418$

   $x_3^{(3)} = -2,9964857;\quad \left\| x^{(3)} - x^* \right\|_\infty \le 0,01576$

6. $x_1 = 0,9444;\quad x_2 = 1,1743;\quad x_3 = 1,1775$ với sai số theo $\|\cdot\|_\infty$ nhỏ hơn $0,5\cdot 10^{-4}$.

10. Doolittle $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -4/11 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/11 & -65/81 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -19/27 & 267/448 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5.1/2 & 2.1/4 & -1.1/2 & 1.3/4 \\ 0 & 0 & -3.15/22 & 1.5/11 & 3/22 \\ 0 & 0 & 0 & 5.43/81 & 1.14/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.391/448 \end{bmatrix}$$

Crout: $$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5.1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3.15/22 & 0 & 0 \\ 3 & 1/2 & 2.21/22 & 5.43/81 & 0 \\ 0 & -1 & 2.13/22 & 3.8/27 & 3.391/448 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -9/22 & 3/11 & -7/22 \\ 0 & 0 & 1 & -32/81 & -1/27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 123/448 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 4
ĐA THỨC NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

§1. ĐA THỨC NỘI SUY

Trong thực hành, thường gặp những hàm số y = f(x) mà không biết biểu thức giải tích cụ thể f của chúng. Thông thường, ta chỉ biết các giá trị $y_0, y_1, ..., y_n$ của hàm số tại các điểm khác nhau $x_0, x_1, ..., x_n$ của đoạn [a, b]. Các giá trị này có thể nhận được thông qua thí nghiệm, đo đạc,... Khi sử dụng những hàm số trên, nhiều khi ta cần biết giá trị của chúng tại các điểm không trùng với $x_i (i = 0,1,2,...,n)$. Muốn thế, ta tìm cách xây dựng một đa thức:

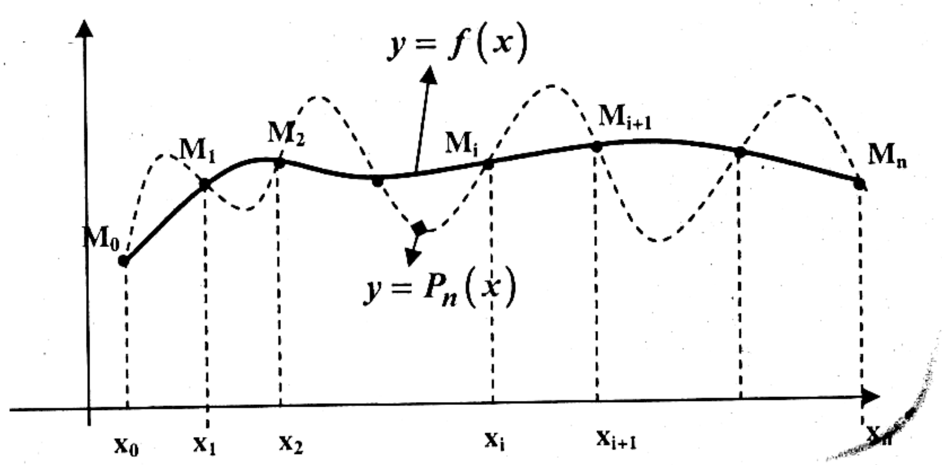
$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

thỏa mãn $\quad P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0,1,2,...,n \qquad (4.1)$

$P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm f(x), các điểm $x_i, i = \overline{0,n}$, gọi là các nút nội suy. Về hình học có nghĩa là tìm đường cong đa thức:

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i)$ đã biết $(i = \overline{0,n})$ của đường cong y = f(x) (hình 4.1)



Hình 4.1

Sau đó, ta dùng đa thức $P_n(x)$ thay cho hàm số f(x) để tính gần đúng giá trị của hàm số f(x) tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$. Nếu điểm

$x \in (x_0, x_n)$ thì phép tính trên gọi là phép tính nội suy. Nếu điểm $x \notin (x_0, x_n)$ (x ở ngoài (x_0, x_n)) thì phép tính trên gọi là phép tính ngoại suy. Sở dĩ ta chọn đa thức $P_n(x)$ vì trong tính toán, đa thức là hàm số dễ tính nhất.

Nhằm giảm bớt khối lượng tính, người ta cũng dùng đa thức nội suy $P_n(x)$ thay cho hàm số f(x) để tính gần đúng giá trị của hàm số tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$ trong trường hợp biểu thức giải tích cụ thể của hàm số f(x) đã biết nhưng tương đối phức tạp. Khi đó, nếu ta tính giá trị của hàm số f(x) tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$ trực tiếp bằng biểu thức giải tích của hàm f thì sẽ tốn nhiều công sức, nhất là khi phải tính nhiều giá trị.

Về sự duy nhất của đa thức nội suy, ta có định lý sau:

Định lý 4.1. Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số f(x), nếu có, thì chỉ có một mà thôi.

Chứng minh.

Giả sử từ những điều kiện (4.1), ta xây dựng được hai đa thức nội suy khác nhau $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ với:

$$P_n(x_i) = y_i; \qquad Q_n(x_i) = y_i \qquad (i = \overline{0,n})$$

Khi đó $P_n(x) - Q_n(x)$ là một đa thức **bậc không lớn hơn n**, nhưng lại triệt tiêu tại n+1 điểm x_i **khác nhau** vì:

$$P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \qquad (i = \overline{0,n})$$

Vậy: $P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$ (nghĩa là $P_n(x) - Q_n(x)$ bằng không với mọi x), hay $P_n(x) \equiv Q_n(x)$. Đó là điều phải chứng minh.

§2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC: SƠ ĐỒ HOOCNER

Vấn đề đặt ra là: cho đa thức bậc n:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

với hệ số thực $a_k (k = 0,1,2,...,n)$. Cần tính giá trị của đa thức tại x = c:

$$P_n(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + ... + a_{n-1} c + a_n \qquad (4.2)$$

Cách tính $P_n(c)$ tiết kiệm nhất về số phép tính như sau: ta viết (4.2) dưới dạng:

$$P_n(c) = (...((((a_0 c + a_1)c + a_2)c + a_3)c ... + a_{n-1})c + a_n)$$

Vậy để tính $P_n(c)$, ta chỉ cần tính lần lượt các số:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + b_0 c \\ b_2 = a_2 + b_1 c \\ b_3 = a_3 + b_2 c \\ \ldots \\ b_n = a_n + b_{n-1} c = P_n(c) \end{cases}$$

Để tiện tính toán, người ta thường dùng sơ đồ sau, gọi là sơ đồ Hoocner:

	a_0	a_1	a_2	...	a_n	c
+	0	b_0c	b_1c	...	$b_{n-1}c$	
	b_0	b_1	b_2	...	$b_n = P_n(c)$	

Thí dụ: 4.1 Dùng sơ đồ Hoocner, tính giá trị của:

$$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

tại c = 3

Giải

Ta có:

	3	2	-5	7	3
+	0	9	33	84	
	3	11	28	$91 = P_3(3)$	

§3. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

3.1 Thành lập đa thức nội suy Lagrange

Giả sử trên [a,b] cho n+1 giá trị khác nhau của đối số : $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và biết, đối với hàm y = f(x), những giá trị tương ứng:

$$f(x_i) = y_i, \ \ i = \overline{0,n}$$

Bây giờ ta xây dựng đa thức nội suy $L_n(x)$, bậc không cao hơn n. thỏa mãn điều kiện:

$$L_n(x_i) = y_i; \ \ i = \overline{0,n}$$

theo cách của Lagrange như sau:

Trước hết xây dựng đa thức $l_i(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } j = i \\ 0 \text{ nếu } j \neq i \end{cases} \qquad (4.3)$$

Vì đa thức $l_i(x)$ phải tìm triệt tiêu tại n điểm $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$ nên $l_i(x)$ có thể viết dưới dạng:

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \quad (4.4)$$

trong đó C_i là hằng số phải tìm, chú ý bậc của $l_i(x)$ là n.

Đặt x = x_i trong (4.4) và để ý đến điều kiện (4.3), ta có:

$$l_i(x_i) = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)$$

Từ đó

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Thay vào (4.4), ta có:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (4.5)$$

Đa thức bậc n $l_i(x)$ được gọi là đa thức **Lagrange bậc n cơ bản**.

Bây giờ, ta xét đa thức sau:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i} \quad (4.6)$$

Dễ thấy rằng bậc của đa thức $L_n(x\ )$ không cao hơn n, và do điều kiện (4.3), ta có:

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x_j) y_i = l_j(x_j).y_j = y_j; \quad j = \overline{0,n}$$

Vậy đa thức $L_n(x\ )$, xác định bởi (4.6), là đa thức nội suy phải tìm. Thay biểu thức của $l_i(x)$ từ (4.5) vào (4.6), nhận được:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} y_i} \quad (4.7)$$

Đó chính là đa thức nội suy Lagrange bậc n. Chú ý: $\boxed{\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1, \forall x}$?

Bây giờ ta xét hai trường hợp hay sử dụng của đa thức nội suy Lagrange.

a. Nội suy bậc nhất hay nội suy tuyến tính

Khi n = 1, ta có hai nút nội suy x_0 và x_1, và:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \qquad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow L_1(x) = y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Phương trình y = $L_1(x)$ chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M_0(x_0,y_0)$ và $M_1(x_1,y_1)$. Người ta thường dùng nội suy tuyến tính để nội suy các bảng tra tính toán trong kỹ thuật, trong kinh tế....

Thí dụ: Năm con gà giá 0.5\$, bảy con gà giá 0.7\$, hỏi 5.3 con gà giá bao nhiêu? Áp (4.8) với, $\begin{cases} x_0 = 5,\ y_0 = 0.5 \\ x_1 = 5,\ y_1 = 0.7 \end{cases}, x = 5.3 \Rightarrow$ ta thu được 0.53\$

b. Nội suy bậc hai

Khi n = 2, ta có ba nút nội suy x_0 , x_1, x_2 và:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \qquad (4.9)$$

Phương trình y = $L_2(x)$ chính là phương trình parabol đi qua ba điểm $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$ và $M_2(x_2,y_2)$. Vậy đa thức Lagrange bậc 3, là qua 3 điểm thì có 3 đa thức con bậc 2 để cộng lại, <u>tổng quát cho bậc n, qua n điểm thì có n đa thức con bậc n-1 để cộng lại, rất nhiều phép toán</u>.

Chú ý ta có thể kiểm chứng trong hai nội suy trên luôn luôn ta có:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1, \forall x} \qquad (*)$$

Ví dụ ở (4.9) đa thức $\sum_{i=0}^{2} l_i(x) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x)$ là một đa thức bậc 2 và nó đều bằng 1 tại 3 điểm khác nhau x_0, x_1, x_2, nên đây là đa thức hằng bằng 1 độc lập với x, điều này ta đã biết trong giáo trình A2-C2. Hay có thể lý luận: do cách xây dựng $l_i(x)$ không phụ thuộc vào các giá trị $y_i = 1,\ \forall i = \overline{0,1}$, nên trường hợp riêng, ta chọn $y_i = 1,\ \forall i = \overline{0,1}$, nên có (*) là đpcm.

<u>*Thí du 4.2*</u> Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin \pi x$, chọn các nút nội suy là $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

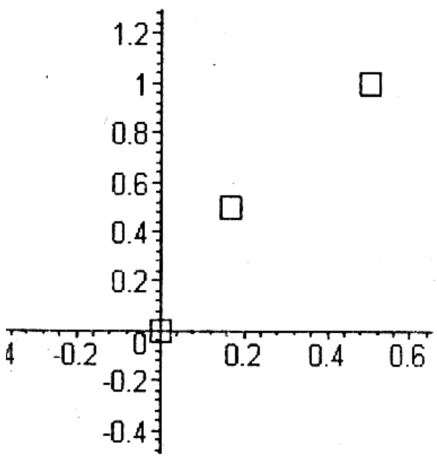
Giải

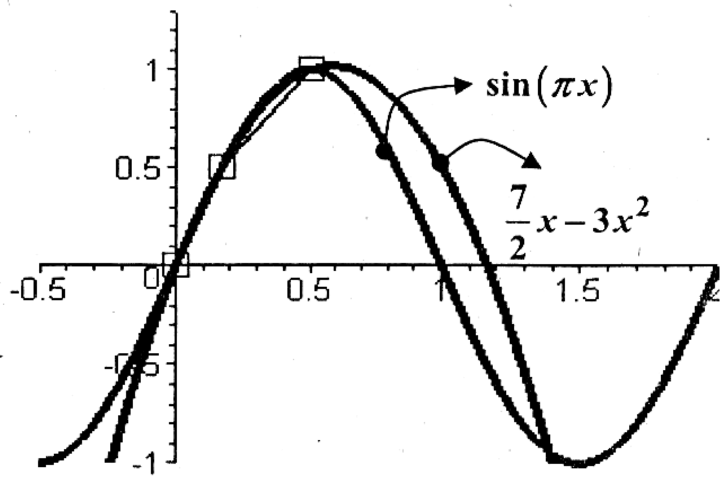
Ta có $y_0 = \sin 0 = 0; y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \hline y & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}.$

Áp dụng công thức (4.9), nhận được

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)}.\boxed{0} + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}.\boxed{\frac{1}{2}} + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}.\boxed{1} =$$

$$= \frac{7}{2}x - 3x^2$$





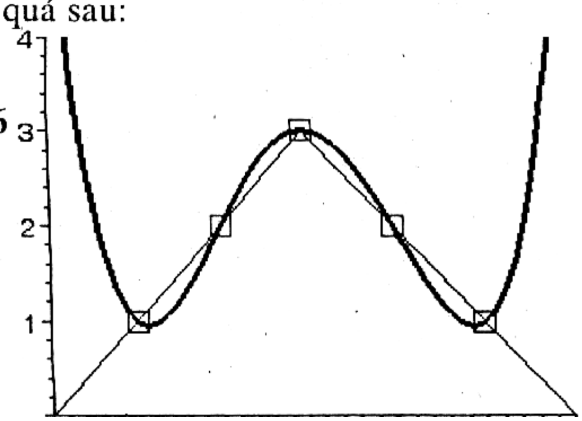
Thí dụ4.2 Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange có đồ thị đẹp như sau: chọn các nút nội suy ở bảng sau, rồi tính f(2.5).

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	2	1

Giải

Sinh viên nghiên cứu thêm, ta có kết quả sau:

$$L_4(x) = \frac{1}{6}x^4 - 2x^3 + \frac{47}{6}x^2 - 11x + 6$$



Sơ đồ tính có thể tóm tắt trên bảng sau:

x	1	2	3	4	5	2.5
y	1	2	3	2	1	
0	- 5/128	15/16	2 7/64	- 5/16	3/128	2 23/32
1	1/24	- 7/12	2 23/24	-6 5/12	5	24
2	- 1/3	4 1/3	-19 2/3	35 2/3	-20	-6
3	3/4	-9	36 3/4	-58 1/2	30	4
4	- 1/3	3 2/3	-13 2/3	20 1/3	-10	-6
5	1/24	- 5/12	1 11/24	-2 1/12	1	24
6	1/6	-2	7 5/6	-11	6	MS

Ta có 5 đa thức con bậc 4, để cộng lại như sau:

Hệ số nhân (của x^4) của số hạng một : **1/24**

Hệ số nhân (của x^4) của số hạng hai : **-1/3**

Hệ số nhân (của x^4) của số hạng ba: **3/4**

Hệ số nhân (của x^4) của số hạng bốn: **-1/3**

Hệ số nhân (của x^4) của số hạng năm: **1/24**

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}\times 1+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}\times 2+$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}\times 3+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}\times 2$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}\times 1=\frac{1}{6}x^4-2x^3+\frac{47}{6}x^2-11x+6$$

Ta có 5 đa thức con bậc 3, để cộng lại như sau:

Hệ số nhân (của x^3) của số hạng một : **-7/12**

Hệ số nhân (của x^3) của số hạng hai : **4 1/3**

Hệ số nhân (của x^3) của số hạng ba: **-9**

Hệ số nhân (của x^3) của số hạng bốn: **3 2/3**

Hệ số nhân (của x^3) của số hạng năm: **- 5/12**

Ta có 5 đa thức con bậc 2, để cộng lại như sau:

Hệ số nhân (của x^2) của số hạng một : **2 23/24**

Hệ số nhân (của x^2) của số hạng hai : **-19 2/3**

Hệ số nhân (của x^2) của số hạng ba: **36 3/4**

Hệ số nhân (của x^2) của số hạng bốn: **-13 2/3**

Hệ số nhân (của x^2) của số hạng năm: **1 11/24**

Ta có 5 đa thức con bậc 1, để cộng lại như sau:

Hệ số nhân (của x^1) của số hạng một : **-6 5/12**

Hệ số nhân (của x^1) của số hạng hai : **35 2/3**

Hệ số nhân (của x^1) của số hạng ba: **-58 1/2**

Hệ số nhân (của x^1) của số hạng bốn: **20 1/3**

Hệ số nhân (của x^1) của số hạng năm: **-2 1/12**

Ta có 5 đa thức con bậc 0, để cộng lại như sau:

Hệ số nhân (của x^0) của số hạng một : **5**

Hệ số nhân (của x^0) của số hạng hai : **-20**

Hệ số nhân (của x^0) của số hạng ba: **30**

Hệ số nhân (của x^0) của số hạng bốn: **-10**

Hệ số nhân (của x^0) của số hạng năm: **1**

Còn hàng 6: thể hiện hàng tổng cộng để ra hệ số của đa thức.

Còn hàng 0: thể hiện thế giá trị 4 vào đa thức để tính $f(2.5)=2$ **23/32**

Cột cuối là **MS** (mẫu số) của từng số hạng.

Ta cũng có thể tính $f(2.5)=2$ 23/32 qua sơ đồ **Hooner**.

1/6	-2	7 5/6	-11	6	2 1/2
	5/12	-3 23/24	9 11/16	-3 9/32	
1/6	-1 7/12	3 7/8	-1 5/16	2 23/32	

Câu hỏi: Nếu tất cả $y_i = 1, \forall i = \overline{1,5}$ ở bảng trên, thì f(2.5) =?

<u>**Chú ý:**</u> Khai triển đa thức $g = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)..(x-a_n)$

Các hệ số tính theo công thức như sau:

x^n là $+1$ có C_n^0 số hạng

x^{n-1} là $-(a_1+a_2+...+a_n)$ có C_n^1 số hạng

x^{n-2} là $+(a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n)$ có C_n^2 số hạng

x^{n-3} là $-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+...+a_{n-2}a_{n-1}a_n)$ có C_n^3 số hạng

---

x^{n-i} là $(-1)^i(a_1a_2...a_i+a_1a_2..a_{i+1}+...+a_{n-i+1}....a_n)$ có C_n^i số hạng

---

x^{n-n} là $(-1)^n(a_1a_2.....a_{n-1}a_n)$ có C_n^n số hạng

<u>Thí dụ 4.3</u> Cho bảng giá trị của hàm số y = $\log_{10}$x

x	300	304	305	307
y	2,4771	2,4829	2,4843	2,4871

Tính gần đúng $\log_{10}301$ bằng đa thức nội suy Lagrange.

Giải

Dùng (4.7) với n = 3, ta có:

$$\log_{10} 301 \approx \frac{(-3)(-4)(-6)}{(-4)(-5)(-7)}.2,4771 + \frac{1(-4)(-6)}{4(-1)(-3)}.2,4829 +$$

$$+\frac{1(-3)(-6)}{5(1)(-2)}.2,4843 + \frac{1(-3)(-4)}{7(3)(2)}.2,4871 \approx 2,4786$$

Ở số hạng đầu: $\dfrac{(-3)(-4)(-6)}{(-4)(-5)(-7)} = \dfrac{(301-304)(301-305)(301-307)}{(300-304)(300-304)(300-304)}$ ......

3.2 Đánh giá sai số

Để đánh giá độ lệch giữa đa thức nội suy Lagrange $L_n(x)$ và hàm số f(x) tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$, ta chứng minh định lý sau:

Định lý 4.2 Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên [a,b] chứa tất cả các nút nội suy $x_i (i = \overline{0,n})$ thì sai số nội suy $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ có dạng sau:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)} \qquad (4.10)$$

trong đó c phụ thuộc x và thuộc [a,b],

$$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Chứng minh

Xét hàm số phụ sau:

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k\pi_{n+1}(x) \qquad (4.11)$$

trong đó k là hằng số sẽ lựa chọn sau.

Hàm số u(x) có n + 1 nghiệm tại các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$. Bây giờ ta chọn k sao cho hàm số u(x) có nghiệm thứ n + 2 tại một điểm $\overline{x}$ bất kỳ, nhưng cố định, $\overline{x}$ của [a,b], không trùng với các nút nội suy. Muốn thế chỉ cần cho

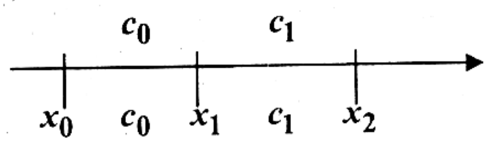
$$f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) - k\pi_{n+1}(\overline{x}) = 0$$

Vì $\pi_{n+1}(\overline{x}) \neq 0$ nên:

$$k = \frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\pi_{n+1}(\overline{x})} \qquad (4.12)$$

(Định lý:Rolle: f(x) khả vi trên [a,b], f(a)=f(b) => $\exists c \in [a,b] : f^{/}(c) = 0$)

Với giá trị k vừa chọn, hàm số u(x) bằng 0 tại **n + 2** điểm $x_0, x_1, ..., x_n, \ \bar{x}$ trên [a,b]. Áp dụng định lý Rolle, thấy rằng đạo hàm $u^{/}(x)$ có không ít hơn n + 1 nghiệm trên [a,b], thật vậy trên $[x_0, x_1]$có $c_0 : u^{/}(c_0) = 0$, trên $[x_1, x_2]$ có $c_1 : u^{/}(c_1) = 0$ .... , trên $[x_n, \bar{x}]$có $c_n : u^{/}(c_n) = 0$. Lại áp dụng định lý Rolle vào đạo hàm $u^{/}(x)$, thấy rằng đạo hàm cấp hai $u^{//}(x)$ có không ít hơn n nghiệm trên [a,b].



Minh họa hình vẽ, với 3 điểm $[x_0, x_1, x_2]$ ta sẽ có $\exists c : u^{//}(c) = 0$. Thật vậy: trên $[c_0, c_1]$: có $u^{/}(c_0) = 0$ và $u^{/}(c_1) = 0$ nên có $\exists c \in [c_0, c_1]$ để $u^{//}(c) = 0$, tiếp tục .... Với n+2 điểm thì có $\exists c : u^{(n+1)}(c) = 0$. Tiếp tục lập luận như trên, thấy rằng trên [a,b] đạo hàm $u^{(n+1)}(x)$ có ít nhất một nghiệm c, nghĩa là: $\quad u^{(n+1)}(c) = 0$

Vì $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ và $\pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, nên theo (4.11) có

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

Tại x = c, nhận được $u^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k(n+1)!$

hay:
$$k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \tag{4.13}$$

Từ (4.12) và (4.13) suy ra:

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

và:
$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(\bar{x}) \tag{4.14}$$

Vì $\bar{x}$ là một điểm bất kỳ của [a,b] không trùng với các nút nội suy, nên có thể viết (4.14) dưới dạng:

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)} \tag{4.15}$$

trong đó c phụ thuộc x và nằm trên [a,b]. Đó là công thức xác định số hạng dư của đa thức nội suy $L_n(x)$.

Chú ý rằng (4.15) đúng với mọi điểm của [a,b], kể cả những điểm nút nội suy.

Đặt $M_{n+1} = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, nhận được đánh giá sau đối với sai số tuyệt đối của đa thức nội suy Lagrange:

$$\boxed{\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\pi_{n+1}(x)\right|} \qquad (4.16)$$

Nhận xét:

1/ Cách chứng minh trên không hề phụ thuộc vào cách xây dựng dạng đa thức Lagrange mà chỉ phụ thuộc vào giả thiết về hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên [a,b]. Nên sai số (4.10) sẽ được dùng chung cho đánh giá sai số theo xấp xỉ Newton ở phần sau.

2/ Và nếu ta xấp xỉ hàm y = f(x) lại là một đa thức thì $R_n(x) = f^{(n+1)}(c) = 0$. Nên việc dùng đa thức Lagrange xấp xỉ một hàm siêu việt trong thực tế nào đó mà ta đã tiên liệu trước, thì việc đánh giá sai số trên mới có ý nghiã, điều này cũng đúng cho xấp xỉ Newton ở phần sau:

Thí dụ 4.4 Cho bảng giá trị của hàm số y = sinx

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0,707	1

Tính gần đúng $\sin\frac{\pi}{3}$ bằng đa thức nội suy Lagrange và đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

Giải

Dùng (4.9), ta có:

$$\sin\frac{\pi}{3} \approx \frac{\otimes}{\otimes}.0 + \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}.0,707 + \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.1 \approx 0,851$$

Để đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta dùng (4.16).

Vì $M_3 = \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |(\sin x)'''| = 1$ nên: $\left|R_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \le \frac{1}{3!}.\frac{\pi}{3}\frac{\pi}{12}\frac{\pi}{6} = 0,024$

và: $\sin\frac{\pi}{3} \approx 0,85 \pm 0,03.$

x	0.000	0.785	1.571	1.047
y	0.000	0.707	1.000	0.866
	0.000	0.629	0.222	0.851
	0.000	0.000	0.000	1.234
	-1.146	1.801	0.000	-0.617
	0.811	-0.637	0.000	1.234
	-0.336	1.164	0.000	

Đa thức bậc 2 nội suy: $-0.336\,x^2 + 1.164\,x$

Nhận xét: Nhược điểm của đa thức nội suy Lagrange là từ đa thức nội suy bậc k chuyển sang đa thức nội suy bậc k + 1, ta phải tính lại tất cả các số hạng của đa thức nội suy bậc k + 1. Đa thức nội suy Newton xét dưới đây sẽ khắc phục được nhược điểm đó.

§4. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

A. Trường hợp các nút nội suy không cách đều

1. Tỷ hiệu

Giả sử hàm số y = f(x) được cho dưới dạng bảng

x	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_i	x_{i+1}	...
y	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_i	y_{i+1}	...

trong đó $y_i = f(x_i)$, i=0,1,2,... và $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$ $(i = 0,1,2,...)$ không bằng nhau.

Tỷ hiệu $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, $(i = 0,1,2,...)$

gọi là **tỷ hiệu cấp một** của hàm số f(x).

Tương tự, định nghĩa các tỷ hiệu cấp hai của hàm số f(x):

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \ (i = 0,1,2,...)$$

Tổng quát, tỷ hiệu cấp n của hàm số f(x) nhận được từ tỷ hiệu cấp n – 1 của hàm số f(x) nhờ công thức truy hồi:

$$\boxed{f[x_i,x_{i+1},...,x_{i+n-1},x_{i+n}]=\frac{f[x_{i+1},...,x_{i+n}]-f[x_i,...,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i},}$$

$$(n=1,2,...;\ i=0,1,2,...) \qquad (4.17)$$

Chú ý rằng tỷ hiệu là hàm số **đối xứng** của các đối số. Chẳng hạn

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{y_i-y_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}=f[x_{i+1},x_i]$$

Một tính chất đáng chú ý của tỷ hiệu là: tỷ hiệu cấp n của một đa thức bậc n bằng hằng số; tỷ hiệu cấp lớn hơn n của một đa thức bậc n bằng 0. Vì tỉ hiệu cấp 1, giống như đạo hàm cấp 1, tỉ hiệu cấp n, giống như đạo hàm cấp n, nên tỷ hiệu cấp n của một đa thức bậc n bằng hằng số, vì đạo hàm cấp n của một đa thức bậc n bằng hằng số......

2. Đa thức nội suy Newton: trường hợp các nút nội suy không cách đều

Giả sử trên đoạn [a,b] cho n + 1 giá trị khác nhau của các đối số $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ (các x_i không cách đều) và biết, đối với hàm số y = f(x), những giá trị tương ứng:

$$f(x_i)=y_i;\ i=\overline{0,n}$$

Bây giờ, ta xây dựng đa thức nội suy $P_n(x\ )$, bậc không cao hơn n thỏa mãn điều kiện:

$$P_n(x_i)=y_i;\ i=\overline{0,n}$$

theo cách của Newton như sau:

Theo định nghĩa, tỷ hiệu cấp một của hàm số f(x):

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-y_0}{x-x_0}$$

Do đó:

$$f(x)=y_0+(x-x_0)f[x,x_0] \qquad (4.18)$$

Dùng định nghĩa tỷ hiệu cấp hai của hàm số f(x), ta có:

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

và: $f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$

Thay $f[x,x_0]$ vào (4.18), nhận được:

$$f(x)=y_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

Tiếp tục quá trình trên, ta có:

$$f(x) = y_0 + (x - \lfloor x_0)f[x_0, \lfloor x_1] + (x - x_0)(x - \lfloor x_1)f[x_0, x_1, \lfloor x_2] + \ldots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - \lfloor x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, \lfloor x_n] +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)f[x, x_0, \ldots, x_n] \tag{4.19}$$

từng số hạng kí hiệu $\lfloor x_{n-1}$ và $\lfloor x_n$ là để chú ý, chúng hơn nhau 1 bậc.

Vế phải của (4.19), bỏ đi số hạng cuối cùng, là một đa thức bậc ông lớn hơn n:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ + \ldots.. + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}} \tag{4.20}$$

Do đó, (4.19) có thể viết dưới dạng:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

với số hạng cuối cùng ta đạt:

$$\boxed{R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)f[x, x_0, \ldots, x_n]} \tag{4.21}$$

Dễ thấy rằng: $R_n(x_i) = 0; i = \overline{0, n}$, và:

$$f(x_i) = P_n(x_i) + R_n(x_i) = P_n(x_i); \quad i = \overline{0, n}$$

Vậy $P_n(x)$ là <u>đa thức nội suy tiến Newton</u> của hàm số f(x). Vì tính duy nhất của đa thức nội suy (định lý 4.1) nên đa thức này hoàn toàn giống đa thức nội suy Lagrange, chỉ khác về cách xây dựng. Cách xây dựng này dựa vào bảng các tỷ hiệu của hàm số f(x), nên đa thức được thành lập dần theo các nút nội suy và khi thêm nút nội suy, không phải làm lại từ đầu như đối với đa thức nội suy Lagrange.

Đa thức (4.20) gọi là **<u>đa thức nội suy Newton tiến</u>** xuất phát từ nút x_0 của hàm số f(x). $R_n(x)$ xác định bởi (4.21) là sai số nội suy.

Bằng cách làm tương tự, ta xây dựng được **<u>đa thức nội suy Newton lùi</u>** xuất phát từ nút x_n của hàm số f(x):

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n)f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] +$$
$$+ \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_i)\ldots(x - x_1)f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \tag{4.22}$$

với sai số nội suy:

$$R_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)(x - x_0)f[x, x_n, x_{n-1} \ldots, x_1, x_0] \tag{4.23}$$

Chú ý:

0. Theo định lý duy nhất nghiệm thì **đa thức nội suy Newton tiến** (4.20) sẽ trùng với **đa thức nội suy Newton lùi** (4.22)
1. Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên [a,b] chứa tất cả các nút nội suy $x_i;\ i=\overline{0,n}$ thì sai số nội suy $R_n(x\ )$ cho ở dạng (4.10) vẫn áp dụng được đối với đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 cũng như đối với đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút x_n của hàm số f(x).
2. Công thức (4.20) rất thuận lợi cho việc nội suy giá trị của hàm số f(x) tại các điểm x gần với x_0, còn công thức (4.22) thường dùng để nội suy giá trị của hàm số f(x) tại các điểm x gần với x_n.

Thí dụ 4.5 Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x)

x	0	2	3	5	6
f(x)	1	3	2	5	6

1. Xây dựng đa thức nội suy **Newton tiến** xuất phát từ nút $x_0 = 0$ của hàm số y = f(x).
2. Dùng đa thức nội suy nhận được tính gần đúng f(1,25).
3. Xây dựng đa thức nội suy **Newton lùi** xuất phát từ nút $x_4 = 6$.
4. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange với bảng nội suy ở trên.

Giải

1. Tỷ hiệu các cấp của hàm số y = f(x) được tính trong bảng sau:

n	x	y	tỉ hiệu cấp 1	tỉ hiệu cấp 2	tỉ hiệu cấp 3	tỉ hiệu cấp 4	tỉ hiệu cấp 5
0	$x_0=0$	$y_0=1$					
1	$x_1=2$	$y_1=3$	$\boxed{1}$				
2	$x_2=3$	$y_2=2$	-1	$\boxed{\frac{-2}{3}}$			
3	$x_3=5$	$y_3=5$	1 1/2	5/6	$\boxed{\frac{3}{10}}$		
4	$x_4=6$	$y_4=6$	1	- 1/6	- 1/4	$\boxed{\frac{-11}{120}}$	0

Vì đây là mốc không cách đều, nên ta dùng tỷ hiệu:

$$f[x_0,x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{3-1}{2-0}=1 \dots\ f[x_2,x_3]=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{5-2}{5-3}=\frac{3}{2}$$

$$f[x_3,x_4]=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\frac{6-5}{6-5}=1$$

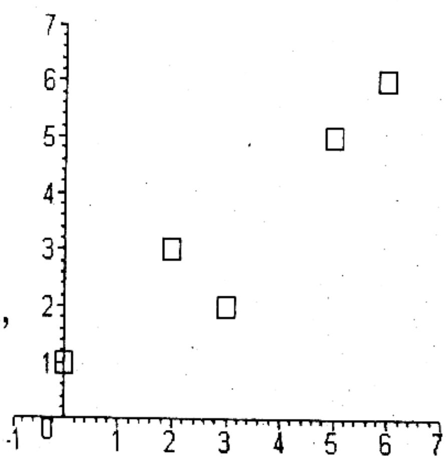
$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-1-1}{x_2-x_0}=\frac{-1-1}{3-0}=-\frac{2}{3}$$

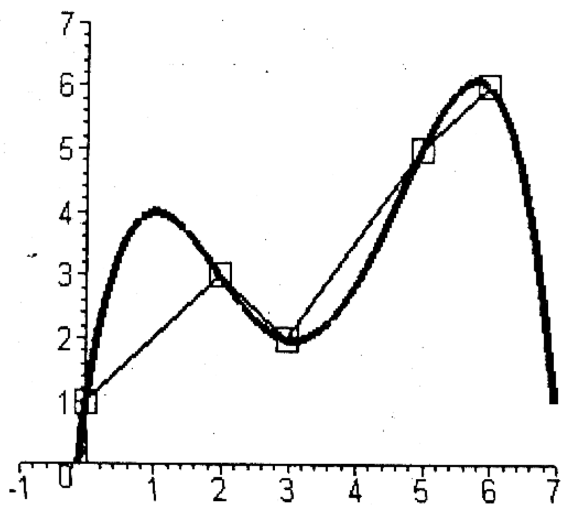
$$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{1-\frac{3}{2}}{x_4-x_2}=\frac{\frac{-1}{2}}{6-3}=\frac{-1}{6}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}{x_3-x_0}=\frac{\frac{3}{2}}{5-0}=\frac{3}{10}$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}}{x_4-x_1}=\frac{-1}{6-2}=\frac{-1}{4}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{x_4-x_0}=\frac{-\frac{22}{40}}{6-0}=\frac{-11}{120}$$





Dùng công thức (4.20), ta có:

$$P_4(x)=1+(x-0).\boxed{1}+x(x-2).\boxed{\frac{-2}{3}}+(x-0)(x-2)(x-3).\boxed{\frac{3}{10}}+$$

$$+(x-0)(x-2)(x-3)(x-5).\boxed{\frac{-11}{120}}=$$

$$-\frac{11}{120}\left(x^4-10x^3+31x^2-30x\right)+\frac{3}{10}\left(x^3-5x^2+6x\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\left(x^2-2x\right)+1\left(x\right)+1=-\frac{11}{120}x^4+\frac{73}{60}x^3-\frac{601}{120}x^2+\frac{413}{60}x+1$$

2. Dùng kết quả nhận được ở câu 1, ta có:

$$f(1,25) \approx P_4(1,25) = 3,9311525$$

3. Xây dựng đa thức nội suy **Newton lùi** xuất phát từ nút $x_4 = 6$.

$$f(y)=6+(y-6)\times 1+(y-6)(y-5)(-\frac{1}{6})+(y-6)(y-5)(y-3)(-\frac{1}{4})+(y-6)(y-5)(y-3)(y-2)(-\frac{11}{120})$$

thu gọn: $f(y) = -\dfrac{11}{120}y^4 + \dfrac{73}{60}y^3 - \dfrac{601}{120}y^2 + \dfrac{413}{60}y \ +1$

nhận xét: Newton tiến hay lùi hoàn toàn giống nhau.

4. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange:

x	0	2	3	5	6	1 1/4
y	1	3	2	5	6	
	123/947	4 619/711	-1 219/256	1 153/512	- 424/827	3 541/581
	1/180	- 4/45	91/180	-1 1/5	1	180
	- 1/8	1 3/4	-7 7/8	11 1/4	0	-24
	1/9	-1 4/9	5 7/9	-6 2/3	0	18
	- 1/6	1 5/6	-6	6	0	-30
	1/12	- 5/6	2 7/12	-2 1/2	0	72
	- 11/120	1 13/60	-5 1/120	6 53/60	1	MS

$$f(x) = -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1,$$

$f(1,25) \approx P_4(1,25) = 3,9311525 = 3\dfrac{541}{581}$, ta có thể tính nó bằng Hooner.

<u>Nhận xét:</u> Định lý 4.1 cho thấy: nội suy theo Newton hay Lagrange thì đa thức nội suy là duy nhất, **nghĩa là chúng đều giống nhau**.

B. Trường hợp các nút nội suy cách đều

1. Hiệu hữu hạn

Giả sử hàm số y = f(x) được cho dưới dạng bảng

x	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_i	x_{i+1}	...
y	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_i	y_{i+1}	...

trong đó $y_i = f(x_i)$, i=0,1,2,... và <u>các nút cách đều</u> nghĩa là $\boxed{x_i = x_0 + ih}$

hay $\boxed{x_{i+1} - x_i = h}$ (h là hằng số > 0, i = 0,1,2...).

Khi đó: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ gọi là <u>hiệu hữu hạn **tiến** cấp một</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ gọi là <u>hiệu hữu hạn **tiến** cấp hai</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

Tổng quát: $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ gọi là <u>hiệu hữu hạn **tiến** cấp n</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

Bây giờ, ta định nghĩa các hiệu hữu hạn lùi: $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ gọi là <u>hiệu hữu hạn lùi cấp một</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$ gọi là <u>hiệu hữu hạn **lùi** cấp hai</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

Tổng quát: $\nabla^n y_i = \nabla(\nabla^{n-1} y_i) = \nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_{i-1}$ gọi là <u>hiệu hữu hạn **lùi** cấp n</u> của hàm số f(x) tại điểm x_i.

Giống tỷ hiệu, hiệu hữu hạn cũng có tính chất đáng chú ý sau: hiệu hữu hạn tiến hoặc lùi cấp n của một đa thức bậc n bằng hằng số; hiệu hữu hạn tiến hoặc lùi cấp lớn hơn n của một đa thức bậc n bằng không.

Dựa vào định nghĩa các **tỷ hiệu**, **hiệu hữu hạn tiến** và **hiệu hữu hạn lùi**, dễ dàng thiết lập được những công thức liên hệ sau:

$$\boxed{f[x_0,x_1] = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\nabla y_1}{h}}$$

$$\boxed{f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} = \frac{\nabla^2 y_2}{2!h^2}};...; \qquad (4.24)$$

$$\boxed{f[x_0,x_1,...,x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} = \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}}$$

(các công thức thể hiện: "tiến ở cực trái, lùi ở cực phải ").

Thật vậy: $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = \dfrac{\dfrac{\Delta y_1}{h} - \dfrac{\Delta y_0}{h}}{2h} = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$

Chứng minh bằng qui nạp: giả sử công thức đúng với (n-1):

$$f[x_0,x_1,...,x_n] = \frac{f[x_1,x_2,...,x_n] - f[x_0,x_1,...,x_{n-1}]}{x_n - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left[\frac{\Delta^{n-1} y_1}{(n-1)!h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} y_0}{(n-1)!h^{n-1}}\right] = \frac{\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0}{n!h^{n-1}} = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

các biểu thức khác chứng minh tương tự, chỉ dựa vào định nghĩa: tỉ hiệu, hiệu hữu hạn tiến và hiệu hữu hạn lùi của chúng mà thôi.

2. Đa thức nội suy Newton: trường hợp các nút nội suy cách đều

Vì các nút nội suy cách đều chỉ là trường hợp đặc biệt của các nút nội suy không cách đều, do đó để xây dựng đa thức nội suy **Newton tiến xuất phát từ nút** (NTCD) x_0 của hàm số f(x) trong trường hợp các nút nội suy x_i cách đều: $\boxed{x_i = x_0 + ih}$, $i = \overline{0,n}$, ta chỉ cần thay trong (4.20):

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ... + \\ + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

các tỷ hiệu bằng các hiệu hữu hạn **tiến** tương ứng của (4.24), ta có:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + ... + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_i)...(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \end{aligned}}$$

Lấy x_0 làm gốc: **Bây giờ thay biến x bằng biến t**,

ta đặt: $\boxed{x = x_0 + ht} \Rightarrow t = \dfrac{x - x_0}{h}$

$x - x_0 = ht \Rightarrow x - x_i = x - (x_0 + ih) = x - x_0 - ih = h(t - i)$,

suy ra $\dfrac{x - x_i}{h} = t - i$, thế vào trên ta có đa thức NT theo biến t:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \\ &+ \frac{t(t-1)(t-2)...(t-i)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned}} \quad (4.25)$$

Đó là **đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0** của hàm số f(x) trong trường hợp các nút nội suy cách đều.

Hoàn toàn tương tự, dùng các công thức (4.22), (4.24) với chú ý rằng các tỷ hiệu có tính chất đối xứng đối với các đối số, ta nhận được công thức của **đa thức nội suy Newton lùi (NLCD) xuất phát từ nút** x_n của hàm số f(x) trong trường hợp các nút nội suy cách đều.

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n)f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \\ + ... + (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_i)...(x - x_1)f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] \quad (4.22)$$

$$\boxed{\begin{aligned}P_n(x) &= P_n(x_n+ht) = y_n + t\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \ldots + \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-i)\ldots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n\end{aligned}} \quad (4.26)$$

Do biến đổi như sau: lấy x_n làm gốc: $x = x_n + ht$ $x_n = x_0 + nh$,

$x_i = x_0 + ih = (x_n - nh) + ih = x_n + h(i-n) \Rightarrow \boxed{x - x_i = h(t+n-i)}$,

áp dụng công thức này, thế vào ta có: $x - x_n = ht$, $x - x_{n-1} = h(t+1)$,

$x - x_{n-2} = h(t+2)$, $x - x_i = h(t+n-i)$, ..., $x - x_1 = h(t+n-1)$.

3. Sai số của đa thức nội suy Newton trong trường hợp các nút nội suy cách đều

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên [a,b] chứa tất cả các nút nội suy cách đều x_i: $\boxed{x_i = x_0 + ih}$ $(i = \overline{0,n})$.

Như nhận xét ở phần sai số của Lagrange, ta sẽ lấy (4.10) làm sai số cho xấp xỉ Newton, Đạt $x = x_0 + ht$, nghĩa là $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ thay vào (4.10) ta nhận được công thức về sai số của **đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0** của hàm số f(x) trong trường hợp các nút nội suy cách đều:

$\boxed{x - x_i = h(t-i)}$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n)} \quad (4.27)$$

trong đó c là giá trị trung gian giữa các nút nội suy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và điểm x.

Tương tự, đạt $x = x_n + ht$, nghĩa là $t = \dfrac{x - x_n}{h}$; trong (4.10) ta nhận được công thức về sai số của **đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút x_n** của hàm số f(x) trong trường hợp các nút nội suy cách đều:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} t(t+1)\ldots(t+n)} \quad (4.28)$$

trong đó c là giá trị trung gian giữa các nút nội suy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và điểm x.

Trong trường hợp $\Delta^{n+1} y$ của hàm số y = f(x) hầu như không đổi và h đủ bé thì do (4.24) ta có:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}=f^{(n+1)}(x),$$

nên ta có thể xem:

$$f^{(n+1)}(c)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

và (4.27) có dang tiến:

$$\boxed{R_n(x)\approx\frac{t(t-1)...(t-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0} \tag{4.29}$$

Tương tự, (4.28) có thể viết dưới dạng lùi :

$$\boxed{R_n(x)\approx\frac{t(t+1)...(t+n)}{(n+1)!}\nabla^{n+1}y_n} \tag{4.30}$$

Thí du 4.6 Cho bảng nội suy :

x	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7
f(x)	11,18	14,78	17.89	23,52	28,56

1/ Viết đa thức Newton tiến cách đều $f_T(t)$, tính $f_T(2)$

2/ Viết đa thức Newton lùi cách đều $f_L(t)$, tính $f_L(2)$

3/ Viết đa thức Newton tiến không cách đều $f_T(x)$, tính $f_T(x=2)$

Giải:

$y_i=\Delta^0 y_i$	$\Delta^1 y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$\boxed{11,18}$				
	$\boxed{3,6}$			
14,78		$\boxed{-0,49}$		
	3,11		$\boxed{3,01}$	
17,89		2,52		$\boxed{-6,12}$
	5,63		$\boxed{-3,11}$	
23,52		$\boxed{-0,59}$		
	$\boxed{5,04}$			
$\boxed{28,56}$				
$\nabla^0 y_i$	$\nabla^1 y_4$	$\nabla^2 y_4$	$\nabla^3 y_4$	$\nabla^4 y_4$

$\Delta y_0=3.6$, $\Delta^2 y_0=-0.49$ $\Delta^3 y_0=3.01$ $\Delta^4 y_0=-6.12$

$\nabla y_4=5.04$, $\nabla^2 y_4 = -0.59$ $\nabla^3 y_4 = -3.11$ $\nabla^4 y_4 = -6.12$

1/ Đa thức nội suy Newton tiến:

$$f_T(t) = y_0 + t\Delta y_0 + t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + t(t-1)(t-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} +$$

$$+t(t-1)(t-2)(t-3)\frac{\Delta^4 y_0}{4!}$$

$$\Leftrightarrow f_T(t) = 11{,}18 + \frac{3827}{600}t - \frac{911}{200}t^2 + \frac{1219}{600}t^3 - \frac{51}{200}t^4$$

Vậy $f_T\left(t = \frac{2-1.9}{0.2} = 0.5\right) = 13.4684375$

2/ Đa thức nội suy Newton lùi:

$$f_L(t) = y_n + t\nabla y_n + t(t+1)\frac{\nabla^2 y_n}{2!} + t(t+1)(t+2)\frac{\nabla^3 y_n}{3!} +$$

$$+t(t+1)(t+2)(t+3)\frac{\nabla^4 y_n}{4!}$$

$$\Leftrightarrow f_L(t) = 28{,}56 + \frac{1307}{600}t - \frac{931}{200}t^2 - \frac{1229}{600}t^3 - \frac{51}{200}t^4$$

Vậy $f_L\left(t = \frac{2-2.7}{0.2} = -3.5\right) = 13.4684375.$

3/ Sinh viên tự làm:

$$f_T(x) = -159\frac{3}{8}x^4 + 1465\frac{5}{24}x^3 - 5013\frac{1}{2}x^2 + 7587\frac{287}{480}x \quad -4279\frac{292}{741}$$

$$f_T(x=2) = 13.4684375.$$

Nhận xét: tuy 3 đa thức NTCD và NLCD và NT không cách đều có khác nhau về cấu trúc, mốc t cũng khác theo, nhưng giá trị hàm thì như nhau.

Thí dụ 4.6/ Cho bảng giá trị hàm số y = sinx

x	15^0	20^0	25^0	30^0
y = sinx	0,258819	0,342020	0,422618	0,500000

1. Dùng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 15^0$, tính gần đúng sin 16^0.
2. Đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

Giải

1. Ở đây các nút nội suy cách đều với h = 5^0. Lập bảng các hiệu hữu hạn tiến, ta có: Máy 570MS--> Mode Deg, sin(15^0) =0,258819....

TT	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	15^0	0.258819				
1	20^0	0.34202	0.083201			
2	25^0	0.422618	0.080598	-0.002603		
3	30^0	0.5	0.077382	-0.003216	-0.000613	0

$\Delta y_0 =$ 0.34202 - 0.258819 = 0.083201,

$\Delta y_1 =$ 0.422618 - 0.34202 = 0.080598

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 =$ 0.5 - 0.422618 = 0.077382

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 =$ 0.080598 - 0.083201 = - 0.002603

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 =$ 0.077382 - 0.080598 = - 0.003216

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =$ -0.003216 + 0.002603 = - 0.000613

Theo công thức (4.25): $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{16^0 - 15^0}{5^0} = 0,2$

$$\sin 16^0 \approx \boxed{0,258819} + 0,2 \times \boxed{0,083201} + \frac{0,2(-0,8)}{2!}\boxed{(-0.002603)} +$$

$$+ \frac{0,2(-0,8)(-1,8)}{3!}\boxed{(-0.000613)} \approx 0,275638$$

Ta có thể tìm đa thức tiến cách đều theo biến t:

$f_T(t) =$ -0.000102233 t^3 -0.000995 t^2 +0.08429812 t + 0.258819

2. Để đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta dùng (4.27) với n = 3. Ta có:

$$\left|\sin^{(4)}(x)\right| = |\sin x| \le 1, \forall x,\ h^4 = \left(\frac{5\pi}{180}\right)^4,\ t - 1 = -0.8, \ldots, t - 3 = -2.8,$$

$$\left|R_3(16^0)\right| = |\sin 16^0 - 0,275638| \le \frac{1}{4!}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^4 |(0,2)(-0,8)(-1,8)(-2,8)|$$

$$\le 0,0000019 \approx 0,000002$$

Vậy $\sin 16^0 \approx 0,275638 \pm 0,000002$.

Thí dụ 4.7 Cho bảng giá trị hàm số y = sinx ở thí dụ 4.6.

1. Dùng đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút $x_3 = 30^0$, tính gần đúng sin 31^0.
2. Đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

Giải

1. Dựa vào bảng các hiệu hữu hạn ở thí dụ 4.6, dễ thấy rằng:

$$\nabla y_3 = 0{,}077382;\quad \nabla^2 y_3 = -0{,}003216;\quad \nabla^3 y_3 = -0{,}000613$$

Theo công thức (4.26): $t = \dfrac{x - x_3}{h} = \dfrac{31^0 - 30^0}{5^0} = 0{,}2$

$$\sin 31^0 \approx \boxed{0{,}500000} + 0{,}2\times\boxed{0{,}077382} + \frac{0{,}2\times1{,}2}{2!}\boxed{(-0.003216)} +$$

$$+\frac{0{,}2\times1{,}2\times2{,}2}{3!}\boxed{(-0.000613)} \approx 0{,}5150366$$

Ta có thể tìm đa thức lùi cách đều:

$$f_L(t) = -0.00010223\,t^3 - 0.001915\,t^2 + 0.0755691\,t + 0.5$$

Và $f_L\left(\dfrac{31-30}{5}\right) = 0.5150364$

2. Để dánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta dùng (4.28) với n = 3. Ta có:

$$\left|R_3(31^0)\right| = |\sin 31^0 - 0{,}5150366| \le \frac{1}{4!}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^4 \times 0{,}2\times1{,}2\times2{,}2\times3{,}2 =$$

$$= 0{,}000004$$

Vậy $\sin 31^0 \approx 0{,}515037 \pm 0{,}000004$.

<u>*Nhận xét:*</u> Qua các thí dụ 4.6 và 4.7, ta thấy rằng nối chung phép tính ngoại suy kém chính xác hơn phép tính nội suy.

§5. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Tìm Đồ thị xấp xỉ ở hai phương pháp Lagrange và Newton là qua các nút nội suy. Còn ở đây ta sẽ khảo sát đồ thị không đi qua các nút nội suy.

Phương pháp bình phương bé nhất thường được dùng để lập công thức thực nghiệm. Giả sử cần tìm quan hệ hàm số giữa hai đại lượng x và y. Muốn thế ta tiến hành thí nghiệm, rồi quan sát, đo đạc, ta nhận được bảng giá trị tương ứng sau:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Việc từ bảng trên tìm ra quan hệ hàm số y = f(x) cụ thể gọi là lập công thức thực nghiệm. Nói chung không có khả năng tìm ra hàm số f(x) đúng hoàn toàn. Ngay việc tìm hàm số xấp xỉ của hàm số f(x) bằng phương pháp bình phương bé nhất cũng rất phức tạp nếu không biết trước dạng của hàm số xấp xỉ. Ở đay, để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp dạng của hàm số xấp xỉ đã biết, đó là những dạng sau:

a. $y = a + bx$

b. $y = a + bx + cx^2$

c. $y = a + b\cos x + c\sin x$

d. $y = ae^{bx}$ $(a > 0)$

e. $y = ax^b$ $(a > 0)$

trong đó a, b, c là những tham số được xác định bằng phương pháp bình phương bé nhất.

Riêng các dạng xấp xỉ sau đây đã được Hãng Casio Nhật cho cài đạt trên các máy tính bỏ túi Fx570MS, VN-Fx570MS, Fx570ES,....

1/ Dạng tuyến tính: $Y = A + BX$

2/ Dạng logarit: $Y = A + B.\ln X$

3/ Dạng mũ: $Y = A.e^{BX}, A > 0 \Rightarrow Y > 0$

4/ Dạng lũy thừa: $Y = A.x^{B}, A > 0, x > 0 \Rightarrow Y > 0$

5/ Dạng nghịch đảo: $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$

6/ Dạng bậc hai: $Y = A + BX + CX^2$

Với sáu dạng này chỉ cần đưa số liệu vào và một vài thao tác nhỏ, máy sẽ cho ta ngay kết quả các hệ số A, B, C cần tìm, và có thể dự báo một vài dữ liệu thuận và nghịch. Phần này có thể tham khảo thêm sách XSTK và FX570MS cho toán cao cấp, phương pháp tính, XSTK của cùng tác giả.

5.1 Trường hợp y phụ thuộc các tham số một cách tuyến tính

a. y = a + bx

Vì các cạp số: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),....,(x_n,y_n)$ nhận được từ thí nghiệm chỉ là những giá trị xấp xỉ của của x, y nên chúng không hoàn toàn nghiệm đúng phương trình y = a + bx, nghĩa là:

$$y_1 - a - bx_1 = \varepsilon_1$$

$$y_2 - a - bx_2 = \varepsilon_2$$

....

$$y_n - a - bx_n = \varepsilon_n$$

trong đó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ là các sai số. Phương pháp bình phương bé nhất nhằm xác định a, b sao cho tổng bình phương các sai số nói trên là bé nhất, nghĩa là: $S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)^2$

bé nhất. Như vậy a, b phải thỏa mãn hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i)(-1) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

Rút gọn, ta có:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i-1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i-1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (4.31)$$

Đây là một hệ thống hai phương trình hai ẩn số a và b. Giải hệ thống này, ta nhận được a và b phải tìm.

Thí dụ: Cho bảng các giá trị:

x	2	4	6	8	10	12
y	7,32	8,24	9,20	10,19	11,01	12,05

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = \sqrt{(a+bx)^3}$.

$y = \sqrt{(a+bx)^3} \Rightarrow a + bx = y^{\frac{2}{3}}$, ta tìm a, b qua 2 hàng $x = X$ và $Y = y^{\frac{2}{3}}$.

$x = X$	2	4	6	8	10	12
y	7.32	8.24	9.2	10.19	11.01	12.05
$Y = y^{\frac{2}{3}}$	3.769995	4.079605	4.390614	4.700198	4.949085	5.256032

Áp dụng (4.31) ta sẽ thu được a= 3.488, b= 0.147.

b. $y = a + bx + cx^2$

Trong trường hợp này, để $S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i - cx_i^2\right)^2$

bé nhất, a, b và c phải thỏa mãn hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i - cx_i^2)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i - cx_i^2)(-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i - cx_i^2)(-x_i^2) = 0 \end{cases}$$

Rút gọn, nhận được:

$$\begin{cases} na + b\sum\limits_{i-1}^{n} x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i-1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i-1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases} \qquad (4.32)$$

Đây là một hệ thống ba phương trình ba ẩn số a, b và c. Giải hệ thống này, ta nhận được a, b và c phải tìm.

c. y = a + bcosx +csinx

Lập luận tương tự như trên, để $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i \right)^2$ bé nhất, a, b và c phải thỏa mãn hệ thống phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)(-\cos x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)(-\sin x_i) = 0 \end{cases}$$

Rút gọn, nhận được:

$$\begin{cases} na + b\sum\limits_{i-1}^{n} \cos x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} \sin x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} \cos x_i + b\sum\limits_{i-1}^{n} \cos^2 x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} \cos x_i \sin x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cos x_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} \sin x_i + b\sum\limits_{i-1}^{n} \cos x_i \sin x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sin x_i \end{cases} \qquad (4.33)$$

Đây là một hệ thống ba phương trình ba ẩn số a, b và c. Giải hệ thống này, ta nhận được a, b và c phải tìm. Xem *Thí dụ 4.12*

Thí dụ 4.8 Cho bảng các giá trị

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	- 0,80	- 0,97	- 0,98	1,07	3,66

Hãy lập công thức thực nghiệm có dạng $y = a + bx + cx^2$.

Giải

Để tìm các hệ số của hệ thống phương trình (4.32), ta lập bảng sau

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
	0,56	0,314	0,176	0,098	-0,80	-0,448	-0,251
	0,84	0,706	0,593	0,498	-0,97	-0,815	-0,685
	1,14	1,300	1,482	1,690	-0.98	-1,117	-1,274
	2,44	5,954	14,527	35,445	1,07	2,611	6,371
	3,16	9,986	31,554	99,712	3,66	11,566	36,549
$\sum_{i=1}^{5}$	8,14	18,260	48,332	137,443	1,98	11,797	40,710

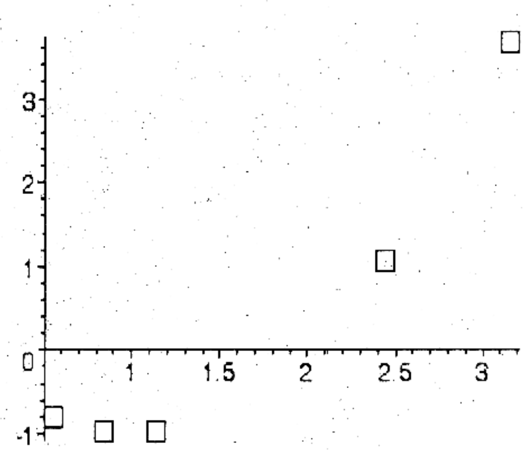
Từ đó hệ thống (4.32) có dạng sau:

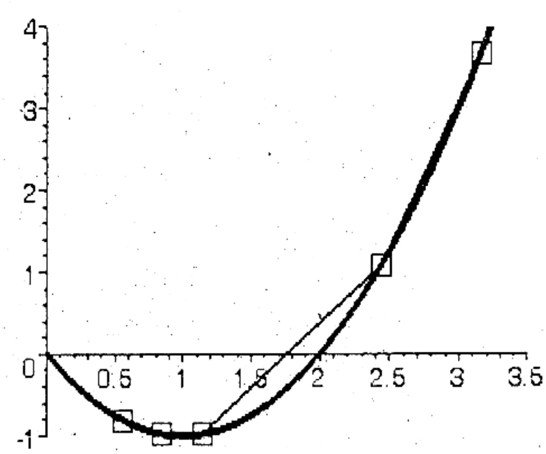
$$\begin{cases} 5a + 8{,}14b + 18{,}260c = 1{,}98 \\ 8{,}14a + 18{,}260b + 48{,}332c = 11{,}797 \\ 18{,}260a + 48{,}332b + 137{,}443c = 40{,}710 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ thống này là: $a \approx 0, b \approx -2$ và $c \approx 1$, vậy: $y = x^2 - 2x$

Bây giờ ta thử tính các giá trị mới của $y = x^2 - 2x$ tại các điểm x_i và so sánh chúng với các giá trị y_i đã cho.

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	- 0,80	- 0,97	- 0,98	1,07	3,66
$y = x^2 - 2x$	- 0,8064	- 0,9744	- 0,9804	1,0736	3,6656





Kết quả cho thấy giá trị của hàm số $y = x^2 - 2x$ tại các điểm x_i khác với các giá trị y_i cho trong bảng không đáng kể, xem đồ thị rời rạc và đồ thị hàm xấp xỉ là khít vào nhau. Thực chất đồ thị trên "xém đi qua" các nút nội suy, chứ không như phương pháp Lagrange hay Newton.

5.2 Trường hợp y phụ thuộc các tham số một cách phi tuyến

a. $y = ae^{bx}$, $a > 0$

Lấy logarit hai vế, ta có:

$$\lg y = \lg a + (b.\lg e)x \qquad (4.34)$$

Đạt: $\lg y = Y$, $\lg a = A$, $b.\lg e = B$, $x = X$ (4.35)

Khi đó, (4.34) có dạng:

$$Y = A + BX \qquad (4.36)$$

Như vậy bằng cách lấy logarit hai vế, ta đưa quan hệ $y = ae^{bx}$ phi tuyến đối với a và b, về dạng tuyến tính đối với A và B. Sau đó, tìm A và B như trong mục 5.1 và tính ra a và b theo (4.35).

b. $y = ax^b$, $a > 0$

Lấy logarit hai vế, ta có:

$$\lg y = \lg a + b.\lg x \qquad (4.37)$$

Đạt: $\lg y = Y$, $\lg a = A$, $b = B$, $\lg x = X$ (4.38)

Khi đó, (4.37) có dạng:

$$Y = A + BX \qquad (4.39)$$

Như vậy bằng cách lấy logarit hai vế, ta đưa quan hệ $y = ax^b$ phi tuyến đối với a và b, về dạng (4.39), tuyến tính đối với A và B. Lại tìm A và B như trong mục 5.1 và tính ra a và b theo (4.38).

Nhận xét

1. Từ mục 5.2 thấy ràng nếu các điểm $M_i(x_i, \lg y_i)$ nói chung phân bố trên một đường thẳng thì quan hệ hàm số giữa y và x có dạng $y = e^{bx}$. Tương tự, nếu các điểm $M_i(\lg x_i, \lg y_i)$ nói chung phân bố trên một đường thẳng thì quan hệ hàm số giữa y và x có dạng $y = x^b$.
2. **Trong các trường hợp trên, ta đều giả thiết đã biết trước dạng của quan hệ hàm số giữa y và x. Trong thực tế, dạng của quan hệ hàm số giữa y và x thường do các định luật của vật lý, kỹ thuật gợi ra. Trong trường hợp không biết gì về dạng của quan hệ hàm số giữa y và x, ta có thể làm nhiều thí nghiệm, loại bỏ các kết quả vô lý, sau đó biểu diễn các cặp số (x_i, y_i) thành những điểm M_i trong mặt phẳng tọa độ 0xy. Căn cứ vào sự phân bố của các điểm M_i trong**

mặt phẳng tọa độ 0xy, ta suy ra dạng hợp lý nhất của quan hệ hàm số giữa y và x.

3. Việc xác định các tham số bằng phương pháp bình phương bé nhất càng chính xác, nếu số các cặp số (x_i, y_i), nhận được từ thí nghiệm, càng nhiều hơn các tham số có mặt trong dạng của quan hệ hàm số giữa y và x.

Thí dụ 4.9 Bảng dưới đây:

t	14,5	30,0	64,5	74,5	86,7	94,5	98,9
k	0	0,004	0,018	0,029	0,051	0,073	0,090

cho giá trị của suất dẫn điện k của thủy tinh phụ thuộc vào nhiệt độ t (tính theo ^{0}C) . Hãy tìm công thức thực nghiệm của hàm số k = f(t).

Giải

Các điểm $M_i\left(t_i, \log k_i\right)$, (i = 1,...,7), **trừ điểm đầu tiên**, nói chung nằm trên một đường thẳng (bảng 4.1 và hình 4.2). Vì vậy công thức thực nghiệm có dạng: $\boxed{k = be^{at}}$. Để tiện, đặt:

$$1000k = c.e^{at} \qquad (4.40)$$

trong đó c = 1000b. Lấy logarit thập phân hai vế của (4.40), ta có:

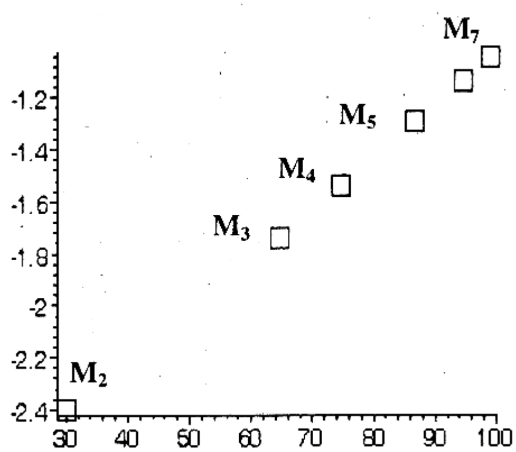
$$y = \log(1000k) = \log c + aMt \qquad (4.41)$$

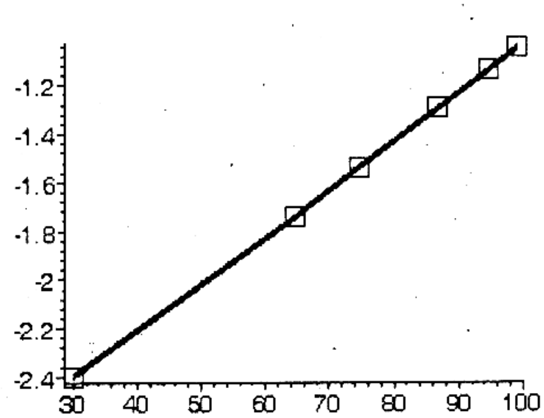
trong đó M = loge = 0,43429.

Bảng 4.1

t	14,5	30,0	64,5	74,5	86,7	94,5	98,9
logk	-∞	-2,3979	-1,7447	-1,5376	-1,2924	-1,1367	-1,0458

Các hệ số logc và aM trong công thức (4.41) được xác định bằng phương pháp bình phương bé nhất dựa trên sáu cặp giá trị của t và k (trừ cặp (14,5;0) loại bỏ vì không hợp lý). Để tìm các hệ số của hệ phương trình (4.31) ta lập bảng sau:





Hình 4.2

	t	t^2	y = log(1000k)	t.y
	30,0	900	0,6021	18,063
	64,5	4160,25	1,2553	80,967
	74,5	5550,25	1,4624	108,949
	86,7	7516,89	1,7076	148,049
	94,5	8930,25	1,8633	176,082
	98,9	9781,21	1,9542	193,270
$\sum_{i=1}^{6}$	449,1	36838,85	8,8449	725,380

Từ bảng trên, hệ phương trình (4.31) có dạng sau:

$$\begin{cases} 6\log c + 449.1\times aM = 8.8449 \\ 449.1\log c + 36838.85\times aM = 725.380 \end{cases}$$

hay: $$\begin{cases} \log c + 74.85\times aM = 1.47415 \\ \log c + 82.0281 a\times M = 1.61519 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là:

aM = 0,01965 ==> a = 0,04525

logc = 0,00335 ==> c = 1,00774

Vậy hàm số k = f(t) phải tìm có dạng: $k = 1,00774\times 10^{-3}\, e^{0.04525}$

c. Dạng nghịch đảo: $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$, ta có 2 cách xấp xỉ:

•Cách 1: Nội suy trực tiếp bằng hàm đảo: (Inv), $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$

•Cách 2: Nội suy gián tiếp bằng hàm tuyến tính: $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$

Ta thay dòng dữ liệu X bằng 1/X, dòng dữ liệu Y vẫn để nguyên, và tìm 2 hệ số A, B giống như là hồi qui tuyến tính ở trên.

Thí dụ: Cho bảng nội suy của một hàm đảo $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$ như sau:

x	1	3	5	7
y	2.3	-1.1	-2.2	-2.02

1/ Tìm công thức thực nghiệm có dạng: (Inv), $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$

2/ Dự đoán khi cho X=9 thì Y=?

3/ Dự đoán khi cho Y= -2.3765 thì X=?

Giải

X	Y
1	2.3
3	-1.1
5	-2.2
7	-2.02

•Cách 1: Nội suy trực tiếp bằng hàm mũ: $(\boldsymbol{Inv})$, $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$

Mode --> REG --> Inv, vào 4 ô dữ liệu sau: $\boxed{X_i}\ \boxed{,}\ \boxed{Y_i}\boxed{M+}$,

$\boxed{1}\boxed{,}\boxed{2.3}\boxed{M+}$, $\boxed{3}\boxed{,}\boxed{-1.1}\boxed{M+}$, $\boxed{5}\boxed{,}\boxed{-2.2}\boxed{M+}$, $\boxed{7}\boxed{,}\boxed{-2.02}\boxed{M+}$,

$\uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{A}$ để được hệ số A = -2.96163.

$\uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{B}$ để được hệ số B = 5.265835.

•Cách 2: Nội suy gián tiếp qua hàm $(\boldsymbol{Inv})$, $Y = A + B.\dfrac{1}{X}$.

tìm A và B theo hồi qui tuyến tính:

X	Y	1/X
1	2.3	1
3	-1.1	0.333333
5	-2.2	0.2
7	-2.02	0.142857

Mode --> REG --> Lin, vào 4 ô dữ liệu sau: $\boxed{\dfrac{1}{X_i}}\ \boxed{,}\ \boxed{Y_i}\boxed{M+}$,

$\boxed{1}\boxed{,}\boxed{2.3}\boxed{M+}$, $\boxed{0.33333}\boxed{,}\boxed{-1.1}\boxed{M+}$,

$\boxed{0.2}\boxed{,}\boxed{-2.2}\boxed{M+}$, $\boxed{0.142857}\boxed{,}\boxed{-2.02}\boxed{M+}$,

$\uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{A}$ để được hệ số A = -2.96163.

$\uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{B}$ để được hệ số B = 5.265835.

2/ Dự đoán khi cho X= 9 thì Y=?

$\mathbf{9} \uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{\hat{y}}$ để được hàm dự báo: $\boxed{\hat{y}}$ = -2.3765.

3/ Dự đoán khi cho Y= -2.3765 thì X= ?.

$\mathbf{-2.3765} \uparrow \boldsymbol{S-VAR} \rhd\rhd\rhd \boxed{\hat{x}}$ để được biến dự báo: $\boxed{\hat{x}}$ = 9. ■

5.3 Xấp xỉ tổng quát bằng luật tổ hợp các hàm cơ sở.

Qua bộ m tọa độ, ta xấp xỉ hàm theo luật tổ hợp các hàm như sau: $f(x)=\sum_{i=1}^{i=n} c_i f_i(x)$, trong đó: $f_i(x)$ là các hàm cơ sở (có thể là tuyến tính hay phi tuyến, ví dụ như :sinx, cosx, e^x, a^{bx}, x^n, $\ln x$,....) , ta đi tìm các hệ số c_i, $i=\overline{1,n}$. Tính phần dư:

$$\begin{cases} r_i = y_i - f(x_i) = y_i - \sum_{j=1}^{j=n} c_j . f_j(x_i) \Rightarrow r = y - Ac \\ \min\left(\rho = \|r\|_2^2\right) \to c_i \end{cases}$$

Qua bộ m tọa độ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_m,y_m)$, ta kí hiệu:

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \vdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \vdots & f_n(x_{m-1}) \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \vdots & f_n(x_m) \end{bmatrix}$$

ta có: $\rho=\|r\|_2^2=(y-Ac)^T(y-Ac)=y^Ty-2y^TAc+c^TA^TAc$

Để tính tối ưu ta tính:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c}=-2A^Ty+2A^TAc=0 \Rightarrow \left(A^TA\right)c=A^Ty \Rightarrow \boxed{c=\left(A^TA\right)^{-1}A^Ty}$$

Thí du 4.10 Bảng dưới đây:

x	0.1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
y	0.61	0.92	0.99	1.52	1.67	2.03

Hãy xấp xỉ nội suy theo hàm $f(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x$

Giải

ta có: $f(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$, $f_1(x)=\frac{1}{x}, f_2(x)=x$

Vậy áp hàm vào các tọa độ ta có:

$$y=\begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.92 \\ 0.99 \\ 1.52 \\ 1.67 \\ 2.03 \end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 10 & 0.1 \\ 2.5 & 0.4 \\ 2 & 0.5 \\ 1.6667 & 0.6 \\ 1.4286 & 0.7 \\ 1.1111 & 0.9 \end{bmatrix}$$

dùng công thức $c=\left(A^TA\right)^{-1}A^Ty$ để tìm c, ta có:

$$f(x)=\frac{0.0365}{x}+2.2177\,x$$

Thí dụ 4.11 Bảng dưới đây là thí dụ 4.8 đã làm:

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	- 0,80	- 0,97	- 0,98	1,07	3,66

Hãy lập công thức thực nghiệm có dang y = a + bx +cx^2.

Giải

Hãy xấp xỉ nội suy theo hàm $f(x)=c_1+c_2\,x+c_3x^2$

Giải

ta có: $f(x)=c_1+c_2\,x+c_3x^2=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)$,

trong đó: $f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_3(x)=x^3$

Vậy áp hàm vào các tọa độ ta có:

$$y=\begin{bmatrix}0.56\\0.84\\1.14\\2.44\\3.16\end{bmatrix},\; c=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},\; A=\begin{bmatrix}1 & 0.56 & 0.3136\\1 & 0.84 & 0.7056\\1 & 1.14 & 1.2996\\1 & 2.44 & 5.9536\\1 & 3.16 & 9.9856\end{bmatrix},$$

dùng công thức $c=\left(A^TA\right)^{-1}A^Ty$ để tìm c, tính:

$$\left(A^TA\right)=\begin{bmatrix}5 & 8.14 & 18.258\\8.14 & 18.258 & 48.331144\\18.258 & 48.331144 & 137.4427368\end{bmatrix}$$

$$\left(A^TA\right)^{-1}=\begin{bmatrix}4.303553879 & -5.86158867 & 1.489514864\\-5.86158867 & 8.775725909 & -2.307288068\\1.489514864 & -2.307288068 & 0.620755316\end{bmatrix}$$

$$c=\left(A^TA\right)^{-1}A^Ty=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.011647528\\-2.010734838\\1.001705769\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix},$$

ta tìm lại kết qủa của thí dụ 4.8: y = x^2 - 2x. ■

Thí dụ 4.12 Cho bảng nội suy dưới đây : Xem công thức (4.33).

x	-2	-1	0	2	3	4
y	-0.4	-3.2	-1.2	7	6	1

Hãy xấp xỉ nội suy theo hàm $f(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

Giải

ta có: $f(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$,

==> $f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = \sin x$

Vậy áp hàm vào các tọa độ ta có:

$$y = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -3.2 \\ -1.2 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & -0.416146837 & -0.909297427 \\ 1 & 0.540302306 & -0.841470985 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -0.416146837 & 0.909297427 \\ 1 & -0.989992497 & 0.141120008 \\ 1 & -0.653643621 & -0.756802495 \end{bmatrix},$$

dùng công thức $c = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y$ để tìm c, tính:

$$\left(A^T A\right) = \begin{bmatrix} 6 & -0.935627485 & -1.457153472 \\ -0.935627485 & 3.045618087 & -0.099677339 \\ -1.457153472 & -0.099677339 & 2.954381913 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.201510295 & 0.065229687 & 0.101589218 \\ 0.065229687 & 0.349818644 & 0.043974902 \\ 0.101589218 & 0.043974902 & 0.390069536 \end{bmatrix}$$

$$c = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.019841168 \\ -3.273595071 \\ 4.105204183 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2.019841168 - 3.273595071 \times \cos x + 4.105204183 \times \sin x$$

Ta có thể tìm lại kết qủa này bằng hệ (4.33) qua excel ■

Thí dụ 4.13: Cho bảng xấp xỉ sau:

x	1	-2	1
y	2	1	1
z	-1	2	1

Hãy lập công thức thực nghiệm có dạng z = a + bx +cy.

Giải

Tìm X: AX=B, trong đó $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ và z=B=$\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$

Ta tìm X dưới dạng: $X=(A^TA)^{-1}A^T B=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10/3\\ -1/3\\ -2\end{bmatrix}$

Thí du 4.14: Cho bảng xấp xỉ sau:

x	2	1	3
y	-1	1	1
z	0	3	5

Hãy lập công thức thực nghiệm có dạng z = a + bx +cy.

Giải

$X=(X^TX)^{-1}X^T Y=\begin{bmatrix}a=0\\ b=x=1\\ c=y=2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$.Trong đó $X=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ và Y=$\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$

Thực chất ở đại số tuyến tính ta đã làm chỉ với 2 biến như sau:

Tìm X: AX=Y, trong đó A=$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ và Y=$\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$X=(A^TA)^{-1}A^T Y==\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$,

trong đó $\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}14 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{38} & \frac{-1}{19}\\ \frac{-1}{19} & \frac{7}{19}\end{bmatrix}$,

vậy $X=\begin{bmatrix}\frac{-3}{38} & \frac{-1}{19}\\ \frac{-1}{19} & \frac{7}{19}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$. Vì đây là xấp xỉ tuyến tính qua gốc tọa độ (đã biết trước đó) chính xác nên a=0, chỉ cần 2 chiều, không cần 3 chiều một cách tổng quát như ví dụ trên đã làm.

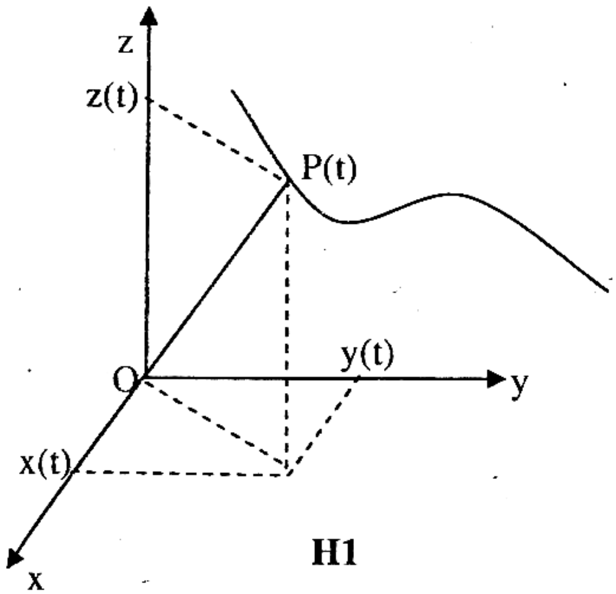
§6. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ B-SPLINE

- Những đường cong toán học xấp xỉ bộ n điểm cho trước (ở các mục trước) chỉ phục vụ có tính chất lý thuyết cho toán học mà thôi. Ví dụ xem lại Hình 4.1 đầu tiên, ta thấy đường cong cần tìm là đường đậm $y = f(x)$ trơn tru và đẹp đúng ý ta mong đợi, nhưng khi xấp xỉ ta lại nhận được đường cong $y = P_n(x)$ uốn éo, dích dắc, phức tạp không cần thiết. Và có những đường cong trong thực tế như: các đường cong tuyệt mỹ trong thân thể con người mà tạo hóa đã ban phát, các đường cong hiện đại được thiết kế trong ô tô, tàu thủy, phi thuyền để chống ma sát, thỏa mãn các điều kiện cao cấp của thủy-khí động khi chạy với vận tốc cao, thì các đường xấp xỉ cổ điển không đáp ứng được. Để vượt lên số phận này B-spline đã ra đời.
- Spline có nghiã là "lưỡi gà" có độ cong thoải mái, B có thể chữ đầu của Bezier, ông là một kỹ sư toán làm việc tại công ty xe hơi Renault (Pháp), những năm 1960 ông đã trình làng, một công thức toán học (**sử dụng các đường cong tham số bậc ba để xấp xỉ các đoạn gãy khúc trong không gian**), đã cung cấp cho người thiết kế các chi tiết máy một công cụ mềm dẻo hơn các phương pháp nội suy cổ điển.
- Nhưng để hiệu chỉnh một chi tiết nhỏ (một điểm chẳng hạn), thì trong toàn bộ hệ thống xấp xỉ của Bezier phải thay đổi theo, mà trong thực tế thì không cần như thế. Và B-spline được thế giới cải tiến từ Bezier để khắc phục nhược điểm trên. Nghiã là: cần thay đổi một cục bộ, một chi tiết nào đó thì toàn bộ hệ thống (ngoài chi tiết đó ra) không bị ảnh hưởng theo.
- Có thể công thức của B-spline thì quá bình thường đối với toán học, nhưng sức mạnh ứng dụng của nó đã lan tỏa một cách ngoạn mục và tuyệt diệu. Vì các hệ thống đồ họa hiện nay, đạc biệt là các họ CAD, CAM, đồ họa WINDOWS,....đều dùng hai phương pháp xấp xỉ Bezier và B-spline.

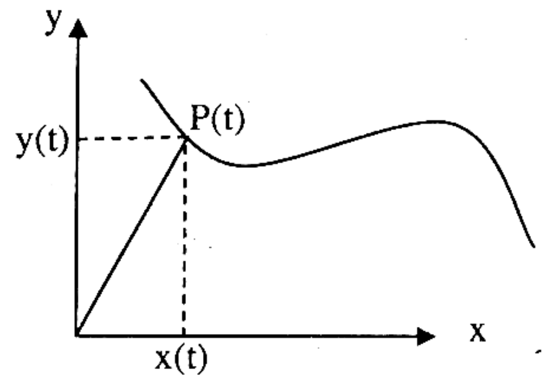
6.1 Đường cong tham số bậc ba

Đường cong tham số bậc 3(không gian): $P(t) = \sum_{i=0}^{i=3} a_i t^i, \quad 0 \le t \le 1$ (6.1)

Đường cong tham số bậc 2(mạt phẳng): $P(t) = \sum_{i=0}^{i=2} a_i t^i, \quad 0 \le t \le 1$ (6.1′)



H1



H2

Đường cong P(t) ở H1 biểu diễn 3 chiều, ở H2 biểu diễn 2 chiều,
Ở 2 chiều ta dùng đường cong tham số bậc 2.

Ở phần này ta xây dựng cho hàm bậc 3, còn hàm bậc 2 cho mạt phẳng, ta xây dựng tương tự.

Khai triển (6.1) ta có dạng sau: $P(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0,\quad 0\le t\le 1$

chiếu xuống các trục (3 chiều) ta có:

$$\begin{cases} x(t)=a_{3x}t^3+a_{2x}t^2+a_{1x}t+a_{0x}, \\ y(t)=a_{3y}t^3+a_{2y}t^2+a_{1y}t+a_{0y}, \quad 0\le t\le 1 \\ z(t)=a_{3z}t^3+a_{2z}t^2+a_{1z}t+a_{0z}, \end{cases} \qquad (6.2)$$

Để giải (6.2) ta cần xác định 12 hệ số a_{ij},

Tương tự cho 2 chiều, ta có 6 hệ số a_{ij} ta cần xác định .

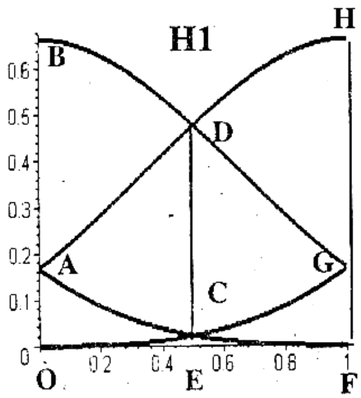
6.2 Đường cong tham số bậc ba B-spline đều.

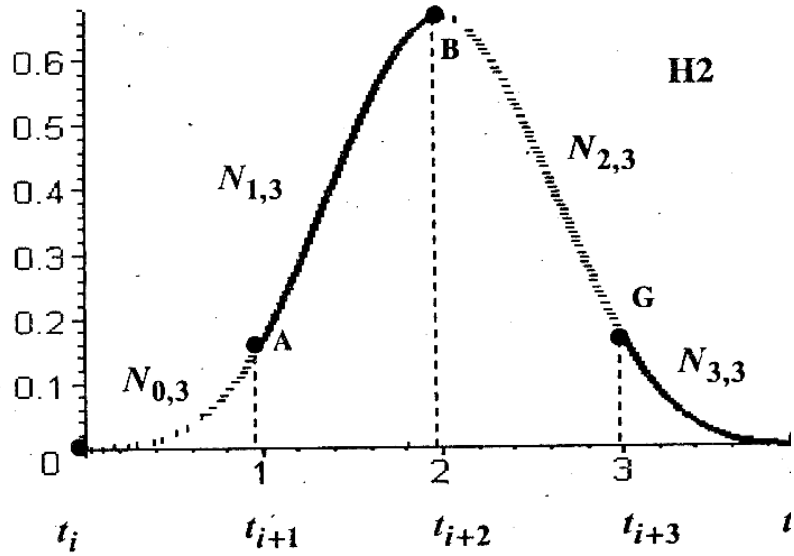
Đường cong tham số bậc ba B-spline đều, được định nghiã:

$$P_i(t)=N_{0,3}(t)V_i+N_{1,3}(t)V_{i+1}+N_{2,3}(t)V_{i+2}+N_{3,3}(t)V_{i+3},\quad 0\le t\le 1 \qquad (6.3)$$

hay viết dưới dạng khác cho thuận tiện ở dạng ma trận sau này:

$$P_i(t)=N_{3,3}(t)V_{i-1}+N_{2,3}(t)V_i+N_{1,3}(t)V_{i+1}+N_{0,3}(t)V_{i+2},\quad 0\le t\le 1 \qquad (6.3')$$





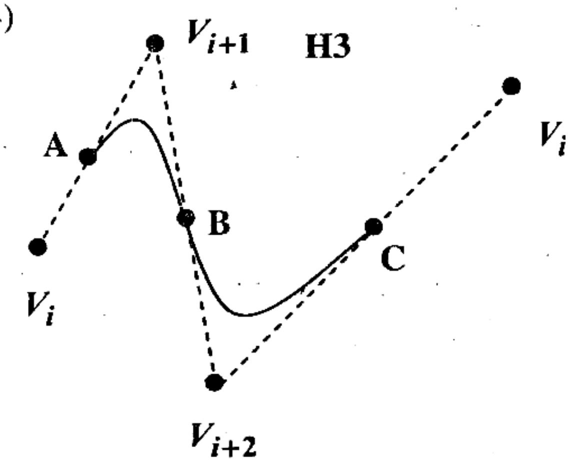
các hàm $N_{i,3}(t) \in C^2[0,1], i = \overline{0,3}$ (hàm$\in C^k[0,1]$, có đạo hàm bậc k
liên tục trên$[0,1]$) gọi là hàm cơ sở, xem H2, các hàm được đạt vào đồ th
có vị trí ở giữa là t_{i+2}, và chúng bằng 0 khi t $< t_i$ và t $> t_{i+4}$. Còn lạ
trong 4 đoạn khác 0 của hàm được tạo từ bốn đa thức bậc 3. Và bộ 4
$(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3})$ là 4 vectơ biểu diễn, ***<u>4 điểm điều khiển của B-spline</u>***
Để xác định hàm cơ sở, trước tiên chúng ta làm từng phân đoạn bằng đa
thức bậc 3 tổng quát có dạng như sau:

$$N_{j,3}(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i, \quad (6.4)$$

j=0,1,2,3, $0 \le t \le 1$

Ta phải xác định 16 hệ số này được xác định từ 16 phương trình sau:

Sáu phương trình đầu tiên có được, nhờ 6 điều kiện :



$$N_{0,3}(0) = N'_{0,3}(0) = N''_{0,3}(0) = 0$$

$$N_{3,3}(1) = N'_{3,3}(1) = N''_{3,3}(1) = 0$$

Tính liên tục thuộc lớp C^0, C^1, C^2, tại 3 nút A, B, C (ở **H3**) bên trong củ
hàm cơ sở, sẽ cung cấp thêm 9 phương trình nữa. các phương trình này th
được bằng cách tham số hóa cục bộ ở các phân đoạn từ t=0 đến t=1. Nh

vậy ta có 6+9 =15 phương trình và phương trình cuối cùng áp dụng điều kiện "chuẩn hóa" như sau: $N_{0,3}(t)+N_{1,3}(t)+N_{2,3}(t)+N_{3,3}(t)=1$

Vậy giải 16 phương trình này, ta có được 4 phân đoạn đa thức tạo nên hàm cơ sở của B-spline:

$$\begin{cases} N_{0,3}(t)=\frac{1}{6}t^3 \\ N_{1,3}(t)=\frac{1}{6}\left(-3t^3+3t^2+3t+1\right) \\ N_{2,3}(t)=\frac{1}{6}\left(3t^3-6t^2+4\right) \\ N_{3,3}(t)=\frac{1}{6}\left(-t^3+3t^2-3t+1\right) \end{cases}, \quad 0\le t\le 1 \qquad (6.5)$$

Bốn hàm này có đồ thị biểu diễn ở **H1**, ta thấy các giá trị đầu cuối, và các giá trị thuộc các lớp C^0, C^1, C^2, ở đầu cuối đều thỏa mãn như ví dụ:

Dựa vào (6.5) ta thử lại: $N_{0,3}(t)+N_{1,3}(t)+N_{2,3}(t)+N_{3,3}(t)=1, \ \forall t$

như: $OA+OB+OA+OB=1$, $EC+ED+EC+ED=1$.

Và các góc tiếp tuyến ở hình H1, và H2 như sau:

$$N'_{0,3}(1)=N'_{0,3}(x_A)=N'_{1,3}(0)=N'_{1,3}(x_A)=\frac{1}{2},$$

$$N'_{1,3}(1)=N'_{1,3}(x_B)=N'_{2,3}(0)=N'_{2,3}(x_B)=0$$

$$N'_{2,3}(1)=N'_{2,3}(x_G)=N'_{3,3}(0)=N'_{3,3}(x_G)=-\frac{1}{2}\ldots\ldots$$

Nếu ta vẽ 4 hàm này trải ra thành 4 phân đoạn thì ta được như H2.

Để tạo ra đường cong B-spline bậc 3 đều, 4 đỉnh điều khiển, được nhân cùng lúc với các hàm cơ sở (6.5). Mỗi phân đoạn có chung 4 đỉnh liên tiếp điều khiển với phân đoạn kế tiếp như sau:

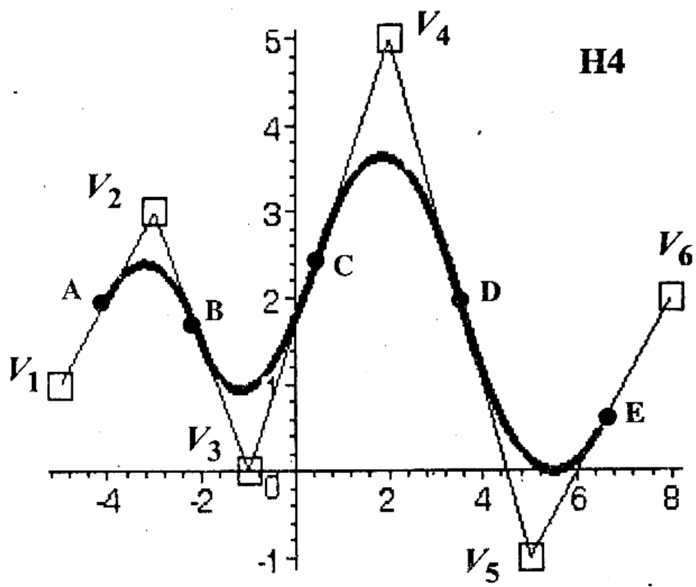
$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5$$

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3;\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4;\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5$$

Đối với B-spline bậc 2 đều, ta dùng bộ 3 điểm điều khiển như thí dụ sau:

Thí dụ 4.11 Xét bài toán phẳng B-spline bậc 2 đều như sau:

Xem hình H4, ta có bộ 6 điểm $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6)$ gọi là bộ điểm điều khiển đã có tọa độ xác định, và đường cong xấp xỉ như hình vẽ không đi qua 6 điểm đó như phương pháp Lagrange hay Newton, mà ứng với mỗi bộ ba điểm liên tục, B-spline sẽ xấp xỉ theo một đa thức bậc 3,



Ví dụ: bộ 3 điểm (V_1,V_2,V_3) ta có cung đường cong $\widehat{AB}$, bộ 3 điểm (V_2,V_3,V_4) ta có cung đường cong $\widehat{BC}$, bộ 3 điểm (V_3,V_4,V_5) ta có cung đường cong $\widehat{CD}$, bộ 3 điểm (V_4,V_5,V_6) ta có cung đường cong $\widehat{DC}$. Cuối cùng ta có đường cong B-spline là $\widehat{ABCDE}$. Hệ đường thẳng gãy khúc chính là hình bao của B-spline là $\widehat{ABCDE}$.

Với B-spline đều ta có tính chất (dựa vào H4):

1) A là trung điểm của đoạn thẳng $\overline{V_1,V_2}$,

   B là trung điểm của đoạn thẳng $\overline{V_2,V_3}$, C là trung điểm của đoạn thẳng $\overline{V_3,V_4}$, ..., E là trung điểm của đoạn thẳng $\overline{V_5,V_6}$.

2) Vậy khi ta điều chỉnh đỉnh V_4 chẳng hạn, thì chỉ có cung đường cong $\widehat{CD}$ thay đổi. Các cung khác vẫn không đổi.

6.3 Dạng ma trận của đường B-spline

• Trong không gian:

Từ (6.3'), (6.5) ta viết lại dưới dạng ma trận.

$$P_i(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{array}{c} N_{3,3},N_{2,3},N_{1,3},N_{0,3} \\ \begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}V_{i-1}\\ V_i\\ V_{i+1}\\ V_{i+2}\end{bmatrix},\quad 0\le t\le 1$$

với bộ 4 điểm điều khiển $(V_{i-1},V_i,V_{i+1},V_{i+2})$

- Trong mạt phẳng:

Làm tương tự cho mạt phẳng 2 chiều, dùng B-spline bậc 2, làm lại từ đầu, ta có:

$$\boxed{P_i(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{i-1}\\ V_i\\ V_{i+1}\end{bmatrix},\quad 0\le t\le 1}$$

với bộ 3 điểm điều khiển (V_{i-1},V_i,V_{i+1})

Thí dụ 4.12 Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2 (mạt phẳng)

Điểm	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
x	-5	-3	-1	2	5	8
y	1	3	0	5	-1	2

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

Giải:

Đây là bài toán có đồ thị như hình H4 ở trên. Ma trận tọa độ:

$$P_i(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{i-1}\\ V_i\\ V_{i+1}\end{bmatrix},\quad 0\le t\le 1 \qquad (*)$$

ta xét trên từng bộ 3 đỉnh (V_{i-1},V_i,V_{i+1})

- Bộ (V_1,V_2,V_3), chiếu xuống trục x, y thì (*) trở thành:

$$x_{P_2(t)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\ -3\\ -1\end{bmatrix}=2t-4$$

$$y_{P_2(t)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}=-\frac{5}{2}t^2+2t+2$$

Điểm $\left(x_{P_2(t)},y_{P_2(t)}\right)$, $0\le t\le 1$, vẽ nên đoạn cong $\overset{\frown}{AB}$

- Bộ (V_2, V_3, V_4), chiếu xuống trục x, y thì (*) trở thành:

$$x_{P_3(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 2$$

$$y_{P_3(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 4t^2 - 3t + \frac{3}{2}$$

Điểm $\left(x_{P_3(t)}, y_{P_3(t)}\right)$, $0 \le t \le 1$, vẽ nên đoạn cong $\overparen{BC}$

- Bộ (V_3, V_4, V_5), chiếu xuống trục x, y thì (*) trở thành:

$$x_{P_4(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 3t + \frac{1}{2}$$

$$y_{P_4(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{11}{2}t^2 + 5t + \frac{5}{2}$$

Điểm $\left(x_{P_4(t)}, y_{P_4(t)}\right)$, $0 \le t \le 1$, vẽ nên đoạn cong $\overparen{CD}$

- Bộ (V_4, V_5, V_6), chiếu xuống trục x, y thì (*) trở thành:

$$x_{P_5(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = 3t + \frac{7}{2}$$

$$y_{P_5(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{9}{2}t^2 - 6t + 2$$

Điểm $\left(x_{P_5(t)}, y_{P_5(t)}\right)$, $0 \le t \le 1$, vẽ nên đoạn cong $\overparen{DE}$

Thí dụ 4.13 Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2, với r >0.

Điểm	V_1	V_2	V_3	V_4
x	r	-r	-r	r
y	r	r	-r	-r

a) Tính sai số xuất hiện tại t=0.5 trên phân đoạn thứ nhất.

b) Với r=2, hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn, khép kín.

c) Vẽ đồ thị chúng.

Giải:

a) Nghiã của bài toán là ta xấp xỉ đường tròn tâm (0,0) bán kính 2 bằng B-spline bậc 2 đều.

Đường cong B-spline đều, rất thuận tiện biểu diễn các đường cong khép kín như ví dụ này

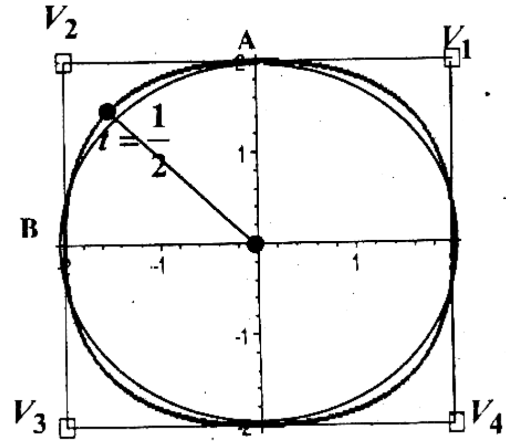
Phân đoạn I :Bộ 3 đỉnh (V_1,V_2,V_3)

Phân đoạn II :Bộ 3 đỉnh (V_2,V_3,V_4)

Phân đoạn III :Bộ 3 đỉnh (V_3,V_4,V_1)

Phân đoạn IV :Bộ 3 đỉnh (V_4,V_1,V_2)

trường hợp r=2 ta có đồ thị như hình vẽ.



$$P_I(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r & r\\ -r & r\\ -r & -r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2r-2rt & -t^2r+r\end{bmatrix}$$

Để tính sai số ta tính tại điểm giữa, nghiã là cho $t=\frac{1}{2}$

$P_I\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}r & \frac{3}{4}r\end{bmatrix}$ vậy bán kính là $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}r\right)^2+\left(\frac{3}{4}r\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}r>r$

Vậy đường cong B-spline không phải đường tròn, mà chỉ là xấp xỉ đường tròn theo nghiã B-spline.

Ở hình vẽ thể hiện nét đậm là B-spline, nét lợt là vòng tròn bán kính r.

b) Để tìm công thức biểu diễn tọa độ từng phân đoạn. Ta có ma trận tọa độ:

$$P_i(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{i-1}\\ V_i\\ V_{i+1}\end{bmatrix},\quad 0\le t\le 1 \qquad (*)$$

ta xét trên từng bộ 3 đỉnh (V_{i-1},V_i,V_{i+1})

- Bộ (V_1,V_2,V_3), chiếu xuống trục x, y thì (*) trở thành:

$$x_{P_2(t)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ -2\end{bmatrix}=2t^2-4t$$

$$y_{P_2(t)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2t^2 + 2$$

Điểm $\left(x_{P_2(t)}, y_{P_2(t)}\right)$, $0 \le t \le 1$, vẽ nên đoạn cong $\widehat{AB}$

Các phân đoạn khác sinh viên tự làm.

Thí du 4.14 Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2 (mặt phẳng)

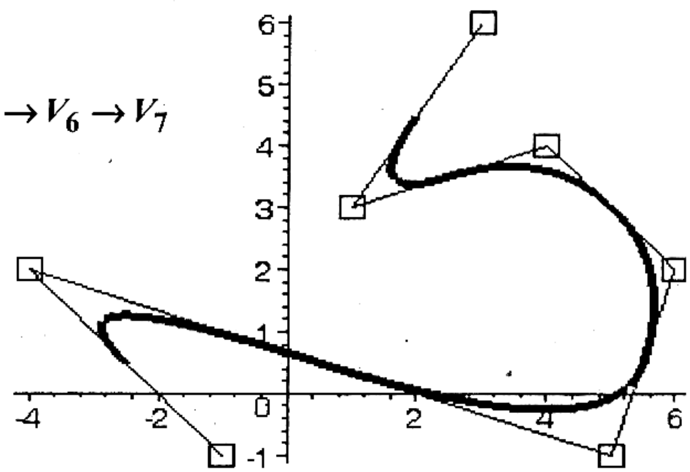
Điểm	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
x	-1	-4	5	6	4	1	3
y	-1	2	-1	2	4	3	6

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

Giải:

Sinh viên tự làm, B-spline bậc 2 có đồ thị uốn éo như thứ tự ta muốn:

$V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_6 \to V_7$



Thí du4.15 Lấy lại ví dụ 4.12'. Hãy so sánh các đa thức (đồ thị) nội suy theo: Lagrange, B-spline, với các nút nội suy là

Điểm	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	2	1

Giải

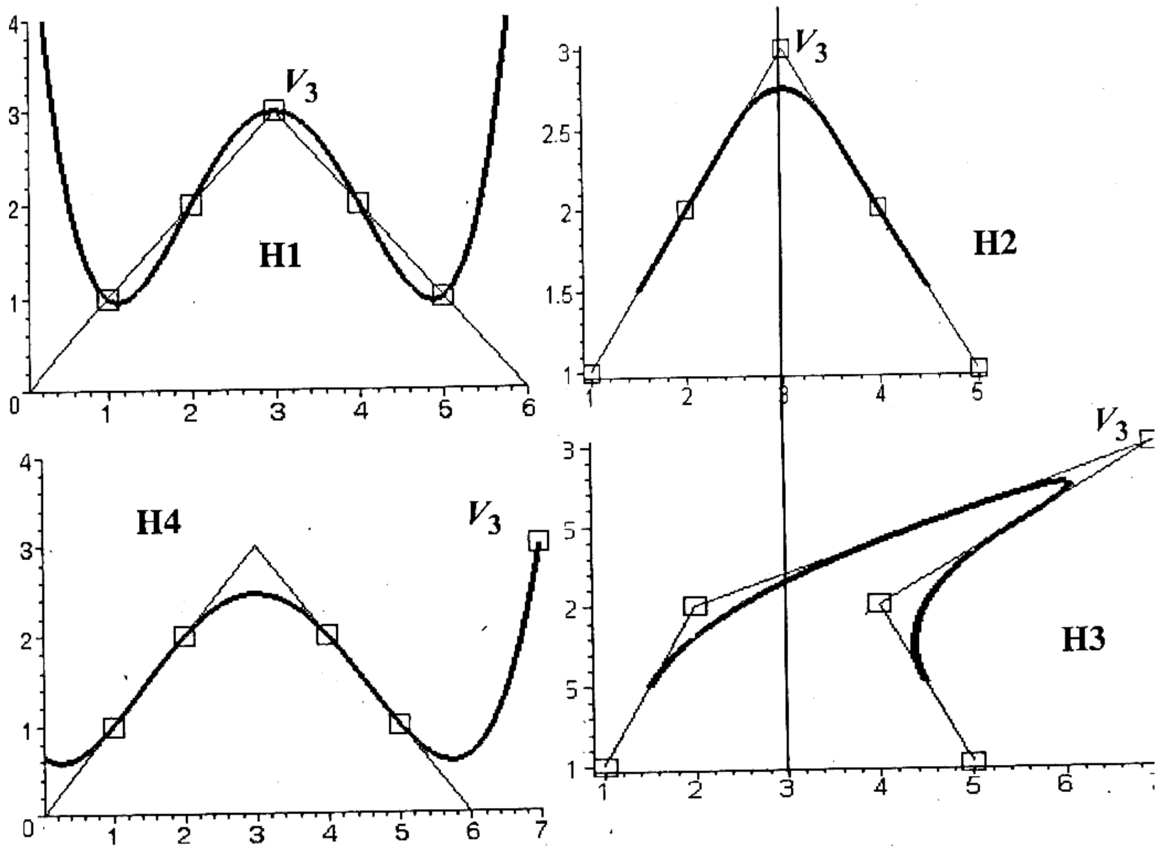
Sinh viên tự làm. Xem các đồ thị như sau:

H1: là nội suy Lagrange

H2: là nội suy B-spline

H3: là nội suy B-spline với thay đổi điểm V_3(3,3)-->V_3(7,3)

H4: là nội suy Lagrange với thay đổi điểm V_3(3,3)-->V_3(7,3)



Nhận xét:

1) H1: không cần thiết phải có nội suy 2 nhánh trái và phải.
2) H2: nội suy theo đúng ý đồ của ta (xem H3).
3) Chỉ cần thay đổi 1 điểm điều khiển $V_3(3,3)$-->$V_3(7,3)$, các điểm khác giữ nguyên thì đồ thị uốn đúng theo ý đồ của ta.
4) Trong khi đó nếu nội suy theo Lagrange (H4) thì đồ thị sẽ không theo thứ tự như ý đồ của ta là: bắt buộc đồ thị phải qua $V_3(7,3)$ trước khi qua V_4 .

BÀI TẬP

1. Dùng sơ đồ Hoocner, tính giá trị của $P_5(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$, tại x = -1,5.
2. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số y = f(x) cho dưới dạng bảng sau:

x	0	2	3	5
y	1	3	2	5

3. Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x):

x	321,0	322,8	324,2	325,0
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Tính gần đúng f(323,5) bằng đa thức nội suy Lagrange.

4. Hãy đánh giá sai số nhận được khi xấp xỉ hàm số y = sinx bằng đa thức nội suy Lagrange bậc 5: $L_5(x)$, biết rằng đa thức này trùng với hàm số đã cho tại các giá trị x bằng 0^0, 5^0, 10^0, 15^0, 20^0 và 25^0. Xác định giá trị của sai số khi x = $12^0 30'$.

5. Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x):

x	-1	0	3	6	7
y	3	-6	39	822	1611

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 = -1 của hàm số y = f(x).

b) Dùng đa thức nội suy nhận được, tính gần đúng f(-0,25).

6. Cho bảng giá trị của hàm số y = sinx:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0,1$ tính gần đúng sin(0,14) và đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

b) Xây dựng đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút $x_3 = 0,4$ tính gần đúng sin(0,46) và đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

7. Cho bảng các giá trị:

x	2	4	6	8	10	12
y	7,32	8,24	9,20	10,19	11,01	12,05

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng y = a + bx.

8. Cho bảng các giá trị:

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = a + bx + cx^2$.

9. Cho bảng các giá trị:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91	2,01	2,11

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = ax^b$.

10. Cho bảng các giá trị:

x	1	2	3	4	5
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

a) Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = ax^2 + b$.

b) Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $f(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x$.

11. Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2,

x	-1	-4	5	6	4	1
y	-1	2	-1	2	4	3

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

12. Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2,

x	-5	-1	2	3	7	8
y	-3	3	2	0	0	-3

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

13. Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2.

x	7	3	7	2	5	10	3	-3	0	-4	-3	3
y	1	2	5	6	9	9	11	8	6	4	0	-2

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

14. Cho bảng các giá trị: Dùng B-spline bậc 2.

x	-1	-4	5	6	4	1	3	-2
y	-1	2	-1	2	4	3	6	5

Hãy tìm công thức biểu diễn tọa độ từng đoạn. Vẽ chúng.

Đáp số

1. 34,84375
2. $1 + \frac{62}{15}x + \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2$
3. 2,50987
4. $\left|\sin x - L_5(x)\right| \le \frac{1}{6!}\left|x\left(x - \frac{\pi}{36}\right)\left(x - \frac{\pi}{18}\right)\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{9}\right)\left(x - \frac{5\pi}{36}\right)\right|$

   Khi x =$12^0 30'$ thì: $\left|\sin 12^0 30' - L_5(12^0 30')\right| < 2,2.10^{-9}$

5. a. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6$

   b. -5,6367188

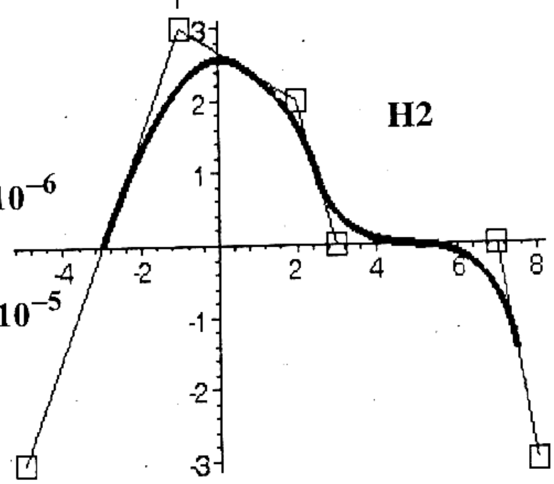
6. a. $\sin(0,14) \approx 0,1395434$

   $\left|\sin(0,14) - 0,1395434\right| \le 4,2.10^{-6}$

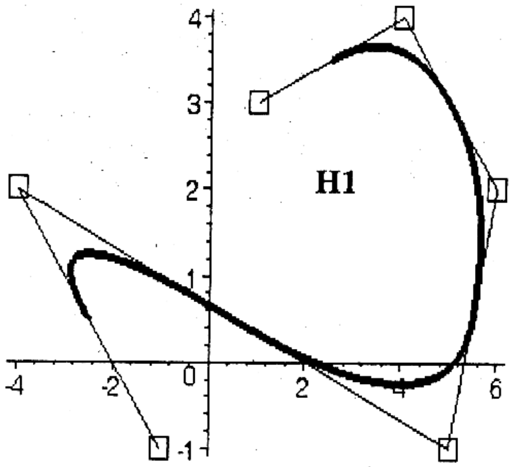
   b. $\sin(0,46) \approx 0,4439446$

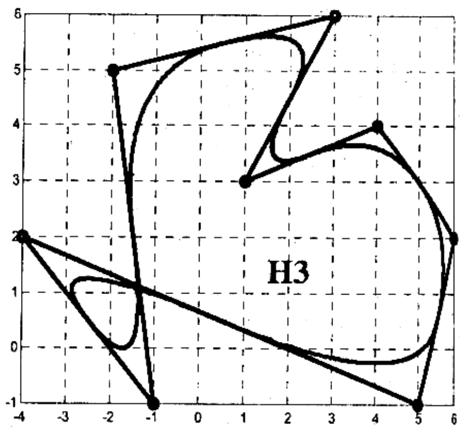
   $\left|\sin(0,46) - 0,4439446\right| \le 3,8.10^{-5}$

7. y = 6,3733333+0,4707143x
8. y = 5,045 – 4,043x + 1,009x^2
9. y = 0,4945$x^{0,3311}$
10. y = 0,992 x^2 -0,909



11. Có đồ thị H1.
12. Có đồ thị H2.





13. Có đồ thị H4.
13. Có đồ thị H3.